Міністерство освіти і науки україни
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки україни
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КЛЄЦКОВ ОЛЕКСАНДР МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ
ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНОЇ МАТРИЦІ З ТОНКОЮ НАКЛАДКОЮ ЗА НАЯВНОСТІ МІЖФАЗНОЇ МІКРО- АБО НАНОТРІЩИНИ З УРАХУВАННЯМ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ

113 Прикладна математика
11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____О.М. Клєцков

Науковий керівник:
Лобода Володимир Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2026

АНОТАЦІЯ

Клєцков О.М. Особливості деформування пружної матриці з тонкою накладкою за наявності міжфазної мікро- або нанотріщини з урахуванням поверхневих ефектів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2026.

Елементи конструкцій, виготовлені з багатокомпонентних сполук, знаходять все ширше застосування у високотехнологічних галузях сучасної техніки. Особливу актуальність мають дослідження напружено-деформованого стану (НДС) об’єктів з мікро- та нанотріщинами, оскільки на таких масштабах фізико-механічні властивості поверхні суттєво відрізняються від об’ємних характеристик. Експлуатаційна надійність таких систем значною мірою визначається наявністю дефектів, зокрема тріщин, що виникають на межі розділу фаз або поблизу закріплених країв конструкційних елементів.

У роботі розроблено аналітичні та чисельні методи дослідження НДС для широкого класу задач механіки руйнування: побудовано аналітичні розв’язки задач про деформування тонких накладок з мікротріщинами вздовж жорстко закріпленого краю та на межі з’єднання двох ізотропних шарів. Виявлено суттєве зростання розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії при зменшенні товщини елементів. В рамках моделі Гуртина-Мердока досліджено вплив поверхневої пружності на концентрацію напружень біля вершин міжфазних тріщин. Встановлено, що врахування поверхневих явищ є критичним для тріщин нанометрового розміру, оскільки вони докорінно змінюють характер сингулярності полів напружень. Розв’язано задачі про антиплоску деформацію нанотріщин у пружних тілах та лінійних квазікристалах. Доведено, що за умови врахування поверхневої пружності класична коренева сингулярність усувається, а напруження у вершинах тріщин набувають скінченних значень.

Розроблені підходи базуються на застосуванні інтегральних перетворень Фур'є, методу сингулярних інтегральних рівнянь та їх чисельній реалізації за допомогою квадратурних формул Гауса-Чебишева. Результати роботи можуть бути використані для прогнозування міцності та проєктування надійних елементів мікро- та наносистемної техніки.

У **вступі та огляді літератури** проведено аналіз публікацій за тематикою дисертації та висвітлено внесок досліджень інших авторів до розвитку цього напрямку.

У **розділі 1** проведено комплексне математичне моделювання задачі плоскої деформації для ізольованої мікротріщини, розташованої вздовж жорстко закріпленої межі тонкої ізотропної накладки.

Математична постановка задачі базується на класичних рівняннях рівноваги Ламе для лінійно-пружного тіла. Для розв'язання змішаної крайової задачі було застосовано апарат інтегральних перетворень Фур'є, що дозволило врахувати граничні умови на вільній та жорстко закріпленій поверхнях накладки. Шляхом задоволення умов на берегах тріщини, задачу було зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) другого роду відносно функцій розкриття тріщини.

Для отримання кількісних характеристик розроблено чисельний алгоритм, в основу якого покладено метод колокацій та квадратурних формул Гауса-Чебишева. Це дозволило з високою точністю врахувати кореневу сингулярність напружень у вершинах тріщини та визначити коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) і швидкість звільнення енергії.

Результати розділу верифіковано шляхом порівняння з чисельним розрахунком методом скінченних елементів, що підтвердило адекватність обраної математичної моделі та високу точність запропонованого аналітико-чисельного підходу.

У **розділі 2** дослідження розширено на складнішу двошарову систему «полоса – накладка», що дозволило змоделювати напружено-деформований стан

міжфазної мікротріщини, розташованої на межі розділу двох ізотропних, лінійно-пружних шарів.

Математична модель задачі базується на системі диференціальних рівнянь теорії пружності у частинних похідних. Побудований аналітичний розв'язок у рамках теорії плоскої деформації враховує відмінності у пружних константах обох середовищ. Використання інтегрального перетворення Фур'є дозволило звести крайову задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно функцій, що описують стрибки переміщень на берегах тріщини. Для розв'язання цієї системи використано квадратурну формулу Гауса-Чебишева. Виконано серію чисельних експериментів для широкого діапазону геометричних параметрів. Отримано закономірності впливу товщини й жорсткості накладки та полоси на характер розкриття мікротріщини і швидкість звільнення енергії. Розрахунки показали, що зменшення товщини тонкої накладки призводить до значного зростання розкриття тріщини та ШЗЕ.

Для підтвердження достовірності отриманих теоретичних результатів проведено детальну верифікацію шляхом порівняльного аналізу з чисельним моделюванням, виконаним методом скінченних елементів. Високий ступінь збіжності між аналітичними даними та результатами МСЕ підтвердив адекватність та високу точність розробленої математичної моделі.

Розділ 3 присвячений дослідженню нанорозмірних об'єктів, де класичні уявлення механіки суцільного середовища стають недостатніми через домінуючий вплив поверхневих явищ. Досліджено напружено-деформований стан та параметри руйнування міжфазної тріщини, розташованої на межі поділу двох ізотропних матеріалів, з інтеграцією положень моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока. У цій моделі береги тріщини розглядаються як нескінченно тонкі пружні мембрани, що мають власні фізико-механічні константи, відмінні від властивостей об'ємного матеріалу.

Математичне формулювання задачі базується на задоволенні ускладнених граничних умов, які враховують стрибок напружень на поверхні тріщини, зумовлений її кривизною та поверхневим натягом. Застосування методики,

основаній на розподілі лінійних дислокацій та лінійних сил на тріщині на межі розділу з поверхневою пружністю дозволило звести задачу до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь.

Для розв'язання отриманих рівнянь використано процедуру поступового збільшення кількості вузлів квадратурної формули Гауса та членів розкладення за поліномами Чебишева, що забезпечило високу стабільність та збіжність результатів для нанометрових масштабів. Отримано закономірності зміни полів напружень та розкриття берегів тріщини залежно від масштабних факторів. Показано, що врахування поверхневого напруження відіграє ключову роль для тріщин нанометрових розмірів, забезпечуючи усування класичної сингулярності і отримання скінченних значення напружень у вершинах тріщин.

У **розділі 4** представлено результати дослідження антиплоскої деформації (тріщини типу III) у наноструктурних елементах та лінійних квазікристалах. Дослідження зосереджено на вирішенні фундаментальної проблеми класичної механіки руйнування – усуненні парадоксу нескінченних напружень у вершині тріщини, який не узгоджується з фізичною природою реальних матеріалів на нанорівні.

Для досягнення цієї мети, як і в розділі 3 математичне формулювання задачі суттєво ускладнено за рахунок урахування масштабних ефектів. Зокрема, подібно до підходу, описаного в розділі 3, тут застосовано модель поверхневої пружності Гуртина-Мердока, де береги тріщини розглядаються як пружні мембрани з власними константами жорсткості. Однак, на відміну від плоскої деформації біматеріалів із розділу 3, у цій моделі вперше для задач антиплоского зсуву враховано специфічний для квазікристалічних структур фононно-фазонний зв'язок, що описує взаємодію звичайної пружної деформації (фононів) із внутрішніми перестановками атомної структури (фазонами).

Проведений чисельний аналіз продемонстрував, що вплив поверхневої пружності, аналогічно до результатів розділу 3 стає домінуючим для тріщин, довжина яких є меншою за один мікрометр, і стрімко посилюється з подальшим зменшенням лінійних розмірів. Встановлено розмірну залежність розв'язку, яка

вказує на те, що нанотріщини в квазікристалах є значно стійкішими до поширення, ніж передбачає стандартна теорія.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному**:**

1. *Вперше проаналізовано* напружено-деформований стан тонких пружних накладок та біматеріальних смуг із мікротріщинами, що дозволило визначити межі застосовності класичних розв’язків для півплощини та виявити суттєве зростання параметрів руйнування при зменшенні товщини елементів.
2. *Удосконалено* та реалізовано розрахункову методику для дослідження міжфазних нанотріщин у біматеріальних з’єднаннях з урахуванням масштабних ефектів на основі моделі Гуртина-Мердока. Вперше враховано різні механічні характеристики поверхневих шарів на нижньому і верхньому берегах тріщини.
3. *Розвинено* підхід до розрахунку полів напружень та деформацій у лінійних квазікристалах та наноструктурах із тріщинами на основі аналітичного розв’язку задачі антиплоскої деформації, що дозволило оцінити спільний вплив фононно-фазонного зв’язку та поверхневої пружності й встановити умови, за яких усувається класична сингулярність.
4. *Запропоновано* підхід до моделювання нанотріщин, шляхом поєднання теорії поверхневої пружності та методу лінійних дислокацій, який забезпечує фізично коректне отримання скінченних значень напружень у вершинах тріщин та описує розмірну залежність.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується: коректним використанням перетворень Фур’є, рівнянь механіки руйнування, теорії пружності квазікристалів та моделі Гуртина-Мердока; застосуванням методу квадратур Гауса-Чебишева для розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь із перевіркою збіжності результатів; узгодженістю отриманих результатів із відомими класичними розв’язками (зокрема, для тонких накладок

і пружної півплощини); відповідністю результатів масштаблим ефектам та принципам енергетичного балансу.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що розроблено комплексні аналітико-числові методики та алгоритми для розрахунку напружено-деформованого стану мікро- і нанорозмірних елементів, біматеріальних з'єднань та квазікристалів із тріщинами. Запропоновані підходи дозволяють ефективно враховувати геометричні чинники (товщину накладок) і масштабні ефекти (поверхневу пружність), що забезпечує високу точність оцінки міцності сучасних композитів.

Результати можуть бути безпосередньо впроваджені в практику КБ та підприємств, які розробляють елементи мікро- й наносистемної техніки, смарт-матеріалів та сенсорів. Це дозволяє ще на етапі проєктування об'єктивно оцінити ресурс виробів, вибрати коректні розрахункові моделі тріщин та забезпечити надійність роботи конструкцій у критичних умовах.

Ключові слова: напруження, деформація, тонка накладка, міжфазна тріщина, сингулярність, поверхнева пружність, модель Гуртина-Мердока, квазікристал, метод скінченних елементів, швидкість звільнення енергії, інтегральні рівняння, масштабний ефект.

ABSTRACT

Klietskov O.M. Deformation peculiarities of an elastic matrix with a thin overlay in the presence of an interface micro- or nanocrack incorporating surface effects. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics - Dnipro National University named after Oles Honchar, Dnipro, 2026.

Structural elements made of multicomponent compounds are finding increasingly widespread applications in high-tech fields of modern engineering. Studies on the stress-strain state of objects with micro- and nanocracks are of particular relevance, as the physical and mechanical properties of the surface at such scales differ significantly from the bulk characteristics. The operational reliability of such systems is largely determined by the presence of defects, particularly cracks that initiate at the interface or near the clamped edges of structural elements.

In this work, analytical and numerical methods for investigating the stress-strain state have been developed for a wide class of problems in fracture mechanics: analytical solutions have been constructed for problems regarding the deformation of thin overlays with microcracks along a rigidly clamped edge and at the interface joining two isotropic layers. A significant increase in crack opening and energy release rate was revealed with a decrease in element thickness. Within the framework of the Gurtin-Murdoch model, the influence of surface elasticity on the stress concentration near interface crack tips was investigated. It has been found that accounting for surface phenomena is critical for nanometer-sized cracks, as they fundamentally alter the nature of the stress field singularity. Problems of anti-plane deformation of nanocracks in elastic bodies and linear quasicrystals have been solved. It is shown that when surface elasticity is taken into account, the classical square-root singularity is eliminated, and the stresses at the crack tips assume finite values.

The developed approaches are based on the application of Fourier integral transforms, the method of singular integral equations, and their numerical

implementation using Gauss-Chebyshev quadrature formulas. The results of this work can be utilized for strength prediction and the design of reliable elements for micro- and nanosystem engineering.

In the **introduction** and **literature review**, an analysis of publications relevant to the dissertation topic is conducted, and the contributions of other authors to the development of this field are highlighted.

In **Chapter 1**, a mathematical modeling of the plane strain problem is performed for an isolated microcrack located along a rigidly clamped boundary of a thin isotropic overlay. The mathematical formulation of the problem is based on the classical Lamé equilibrium equations for a linearly elastic body. To solve the mixed boundary value problem, the apparatus of Fourier integral transforms was applied, which allowed for the boundary conditions on the free and rigidly clamped surfaces of the overlay to be taken into account. By satisfying the conditions on the crack faces, the problem was reduced to solving a system of singular integral equations of the second kind with respect to the crack opening functions. To obtain quantitative characteristics, a numerical algorithm was developed based on the collocation method and Gauss-Chebyshev quadrature formulas. This enabled accounting for the square-root stress singularity at the crack tips with high precision and allowed for the determination of the stress intensity factors and the energy release rate. The results of this chapter were verified by comparison with a numerical calculation using the finite element method, which confirmed the adequacy of the chosen mathematical model and the high accuracy of the proposed analytical-numerical approach.

In **Chapter 2**, the investigation is extended to a more complex two-layer system, "strip – overlay," which enabled modeling the stress-strain state of an interface microcrack located at the boundary joining two isotropic, linearly elastic layers. The mathematical model of the problem is based on a system of partial differential equations of the theory of elasticity. The constructed analytical solution within the framework of plane strain theory accounts for the differences in the elastic constants of both media. The use of the Fourier integral transform made it possible to reduce the boundary value problem to a system of singular integral equations with respect to the

functions describing displacement jumps across the crack faces. To solve this system, the Gauss-Chebyshev quadrature formula was utilized. A series of numerical experiments was carried out for a wide range of geometric parameters. The regularities of how the thickness and rigidity of the overlay and the strip influence the nature of the microcrack opening and the energy release rate were obtained. The calculations demonstrated that a decrease in the thickness of thin overlay leads to a significant increase in both the crack opening and the energy release rate (ERR). To validate the reliability of the obtained theoretical results, a detailed verification was performed through a comparative analysis with numerical modeling executed via the finite element method. The high degree of convergence between the analytical data and the FEM results confirmed the adequacy and high precision of the developed mathematical model.

Chapter 3 is devoted to the investigation of nanoscale objects, where the classical concepts of continuum mechanics become insufficient due to the dominant influence of surface phenomena. The stress-strain state and fracture parameters of an interface crack located at the boundary joining two isotropic materials are investigated, with use of the postulates of the Gurtin-Murdoch surface elasticity model. In this model, the crack faces are treated as infinitely thin elastic membranes possessing their own physical and mechanical constants that differ from the bulk material properties.

The mathematical formulation of the problem is based on satisfying complex boundary conditions that account for the stress jump across the crack surface caused by its curvature and surface tension. Applying a methodology based on the distribution of linear dislocations and line forces on the crack at the interface with surface elasticity enabled the reduction of the problem to a system of singular integro-differential equations.

To solve the resulting equations, a procedure of gradually increasing the number of nodes in the Gauss quadrature formula and the number of terms in the Chebyshev polynomial expansion was utilized, ensuring high stability and convergence of the results at nanometer scales. The regularities governing changes in the stress fields and the opening of the crack faces as functions of scale factors were obtained. It is

demonstrated that accounting for surface stress plays a key role for nanometer-sized cracks, ensuring the elimination of the classical singularity and yielding finite stress values at the crack tips.

In **Chapter 4**, the results of investigating anti-plane deformation (mode III cracks) in nanostructural elements and linear quasicrystals are presented. The research focuses on resolving a fundamental problem of classical fracture mechanics-eliminating the paradox of infinite stresses at the crack tip, which does not align with the physical nature of real materials at the nanoscale.

To achieve this goal, as in Chapter 3, the mathematical formulation of the problem is significantly complicated by incorporating scale effects. Specifically, similar to the approach described in Chapter 3, the Gurtin-Murdoch surface elasticity model is applied here, where the crack faces are treated as elastic membranes with their own stiffness constants. However, in contrast to the plane strain of bimaterials in Chapter 3, this model incorporates, for the first time in an anti-plane shear problem, the phonon-phason coupling specific to quasicrystalline structures, which describes the interaction between conventional elastic deformation (phonons) and internal rearrangements of the atomic structure (phasons).

The conducted numerical analysis demonstrated that the influence of surface elasticity, analogous to the results in Chapter 3, becomes dominant for cracks with lengths less than one micrometer and rapidly intensifies with a further decrease in linear dimensions. A size-dependent nature of the solution has been established, indicating that nanocracks in quasicrystals are significantly more resistant to propagation than predicted by the standard theory.

The scientific novelty of the obtained results is as follows:

1. **For the first time**, the stress-strain state of thin elastic overlays and bimaterial strips with microcracks has been analyzed, which made it possible to determine the limits of applicability of classic half-plane solutions and to reveal a significant increase in fracture parameters with a decrease in element thickness.

2. A calculation methodology for studying interfacial nanocracks in bimaterial joints, taking scale effects into account based on the Gurtin-Murdoch model, has been **improved** and implemented. For the first time, different mechanical characteristics of the surface layers on the upper and lower crack faces have been taken into account.
3. An approach to calculating stress and strain fields in linear quasicrystals and nanostructures with cracks based on an analytical solution to the antiplane deformation problem has been **further developed**, allowing for the assessment of the combined effect of phonon-phason coupling and surface elasticity, as well as establishing the conditions under which the classical singularity is eliminated.
4. An approach to modeling nanocracks by combining the theory of surface elasticity and the distributed dislocation method has been **proposed**, which ensures a physically correct derivation of finite stress values at crack tips and describes size dependence.

The validity and reliability of the obtained results are ensured by: the correct application of Fourier transforms, equations of fracture mechanics, the elasticity theory of quasicrystals, and the Gurtin-Murdoch model; the use of the Gauss-Chebyshev quadrature method to solve singular integral equations, including the convergence analysis of the results; the consistency of the obtained results with well-known classical solutions (in particular, for thin overlays and an elastic half-plane); and the agreement of the results with scale effects and the principles of energy balance.

The practical significance of the obtained results is in the development of comprehensive analytical-numerical methodologies and algorithms for calculating the stress-strain state of micro- and nanoscale elements, bimaterial joints, and quasicrystals with cracks. The proposed approaches enable efficient consideration of geometric factors (overlay thickness) and scale effects (surface elasticity), thereby ensuring high accuracy in evaluating the strength of modern composites.

The results can be directly implemented into the practice of design bureaus and enterprises engaged in developing elements for micro- and nanosystem engineering, smart materials, and sensors. This allows for an objective assessment of product lifespan at the design stage, the selection of correct computational crack models, and the ensuring of structural operational reliability under critical conditions.

Key words: stress, strain, thin overlay, interface crack, singularity, surface elasticity, Gurtin-Murdoch model, quasicrystal, finite element method, energy release rate, integral equations, scale effect.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Клєцков О.М., Лобода В.В. Аналітичний та чисельний аналіз мікротріщини вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки. Computer Science and Applied Mathematics. 2024. № 2. С. 5-12. https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-2-01 (**фахове видання, категорія Б**) *(особистий внесок Клєцкова О.М.: побудова аналітичних розв'язків, їхня чисельна реалізація, проведення скінченно-елементного аналізу, візуалізація результатів; Лободи В.В.: визначення плану дослідження, методологія, контроль);*

2. Kletskov O., Silich-Balhabaieva V., Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. On deformation peculiarities of two thin strips with a microcrack at the interface. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2025. Вип. 2(118). С. 153-167. https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2025.02.153 (**фахове видання, категорія Б**) (*особистий внесок Клєцкова О.М.: побудова інтегральних перетворень переміщень і напружень тестування розв'язку системи СІР, проведення скінченно-елементного аналізу, візуалізація результатів; Лободи В.В.: методологія, побудова системи СІР; Сіліч-Балгабаєва В.Б.: перевірка аналітичних перетворень, контроль; Шевельова А.Є.: розробка алгоритму розв'язку системи СІР, чисельний аналіз; Лапуста Ю.М.: визначення плану дослідження, побудова скінченно-елементної сітки*);

3. Клєцков О.М., Лобода В.В. Міжфазна тріщина між двома ізотропними матеріалами з урахуванням поверхневих ефектів. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2025. Вип. 40. С. 86-103. https://doi.org/10.15421/4225216 (**фахове видання, категорія Б**) *(особистий внесок Клєцкова О.М.: побудова аналітичних розв'язків, їх чисельна реалізація та аналіз результатів; Лободи В.В.: визначення плану дослідження, методологія, контроль);*

4. Клєцков О.М., Шевельова А.Є., Лобода В.В. Ефект поверхневої пружності при аналізі нанотріщини в антиплоскому полі навантажень. Системні

технології. 2026. Вип. 1(162). С. 177-190. https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-162-2026-19 (**фахове видання, категорія Б**) *(особистий внесок Клєцкова О.М.:* побудова інтегральних рівнянь, візуалізація та аналіз результатів*; Лободи В.В.: визначення плану дослідження, контроль; Шевельова А.Є.: методологія, розв'язок інтегральних рівнянь);*

5. Клєцков О. М., Лобода В. В. Аналіз антиплоскої деформації квазікристала з тріщиною з урахуванням поверхневих ефектів. Технічна механіка. 2026. № 1. С. 62-72. https://doi.org/10.15407/itm2026.01.062 (**фахове видання, категорія Б**) *(особистий внесок Клєцкова О.М.: побудова аналітичних розв'язків, їх чисельна реалізація та аналіз результатів; Лободи В.В.: визначення плану дослідження, методологія, контроль).*

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. **Клєцков О.М.**, Лобода В.В. Аналітичний та чисельний аналіз мікротріщини вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки. Математичні проблеми технічної механіки - 2024: матеріали Міжнар. наук. конф. (18-19 квітня 2024р., м. Дніпро). Д.: ДНУ, 2024. Ч. 1. С. 89–90.
https://www.dnu.dp.ua/docs/ndc/2024/materiali_konferenc/Matem_probl_tehn_meh.pdf

2. **Клєцков О.М.**, Шевельова А.Є, Лобода В.В. Вплив поверхневої пружності на нанотріщину в ізотропному матеріалі. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2025): тези доп. XXIII Міжнар. наук.-практ. конф., м. Дніпро, 19-21 листопада 2025 р. Д.: ДНУ, 2025. С. 168.
https://mpzis.dnu.dp.ua/assets/docs/archive/%D0%9C%D0%9F%D0%97%D0%86%D0%A1-2025.pdf

3. **Клєцков О.М**., Лобода В.В. Вплив поверхневих ефектів на антиплоску деформацію квазікристалу з тріщиною. Математичні проблеми технічної механіки - 2026: матеріали Міжнар. наук. конф. (19-20 лютого 2026р., м. Дніпро). Симпозіум «Механіка суцільного середовища і міцності конструкцій», присвячений 150-ій річниці від дня народження академіка Олександра Миколайовича Динника. Дніпро: Дніпров. нац. ун-т ім. О. Гончара, 2026. Ч. 1. С. 43.
https://www.dnu.dp.ua/docs/ndc/materiali%20conf/2026/1%20%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20%D0%9C%D0%9F%D0%A2%D0%9C%202026.pdf

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ…….. 2

ВСТУП…….. 18

РОЗДІЛ 1. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОЇ НАКЛАДКИ з МІКРОТРІЩИНОЮ ВЗДОВЖ її ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОГО КРАЮ…….. 35

1.1 Математична постановка задачі…… 35

1.2 Побудова аналітичного розв'язку крайової задачі……. 36

1.3 Чисельна аналіз аналітичних результатів……... 40

1.4 Аналіз отриманих результатів та їх інтерпретація…… 42

1.5 Розрахунок за допомогою методу скінченних елементів та порівняння результатів……..... 45

1.6 Висновки до першого розділу…….. 48

РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОЇ ПОЛОСИ І НАКЛАДКИ З МІКРОТРІЩИНОЮ НА МЕЖІ ЇХ З'ЄДНАННЯ….. 49

2.1 Постановка проблеми та застосування інтегральних перетворень Фур'є…….. 49

2.2 Формулювання та аналіз системи сингулярних інтегральних рівнянь……... 51

2.3 Алгоритм чисельного аналізу взаємодії полоси та накладки…… 54

2.4 Результати розрахунків та їх аналіз……. 57

2.5 Висновки до другого розділу…… 64

РОЗДІЛ 3. МІЖФАЗНА ТРІЩИНА МІЖ ДВОМА ІЗОТРОПНИМИ МАТЕРІАЛАМИ З УРАХУВАННЯМ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ…. 65

3.1 Поверхнева пружність в моделі Гуртина-Мердока……. 65

3.2 Постановка проблеми для міжфазної тріщини з урахуванням поверхневих ефектів……. 67

3.3 Виведення системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь для нанотріщини……... 68

3.4 Числовий метод розв’язання…… 72
3.5 Результати розрахунків та їх аналіз…….. 75
3.6 Висновки до третього розділу…….. 81
РОЗДІЛ 4. АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ НАНОСТРУКТУР ТА КВАЗІКРИСТАЛІВ З ТРІЩИНАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ……. 83
4.1 Дослідження впливу поверхневої пружності на напружено-деформований стан нанотріщини типу III…….. 83
4.1.1 Математичне формулювання задачі антиплоскої деформації для нанорозмірного об’єкта……. 83
4.1.2 Побудова сингулярного інтегро-диференціального рівняння... 84
4.1.3 Числовий метод розв’язання та аналіз результатів……. 89
4.2 Аналіз деформаційних полів у квазікристалах з тріщиною при врахуванні поверхневих напружень……... 96
4.2.1 Основні співвідношення для квазікристалів з урахуванням поверхневих ефектів……. 96
4.2.2 Побудова розв’язку для взаємопов’язаних фононних та фазонних полів…….. 98
4.2.3 Чисельна реалізація розрахунку …….. 100
4.2.4 Аналіз результатів для нанотріщин в квазікристалах……. 103
4.3 Висновки до четвертого розділу……... 106
ВИСНОВКИ…… 108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ…… 111
ДОДАТКИ…… 124

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. В останній час істотно збільшується використання високотехнологічних приладів та мікросхем, що містять елементи конструкцій, виготовлені з наноструктурованих, композитних матеріалів та складних кристалічних сполук. Особливого розповсюдження набули тонкостінні елементи (накладки, плівки, покриття) та лінійні квазікристали, які відзначаються унікальними фізико-механічними властивостями, легкістю та стійкістю до екстремальних умов експлуатації. Однак їх надійність значною мірою залежить від наявності різного роду дефектів, передусім мікро- та нанотріщин, які виникають з технологічних або експлуатаційних причин вздовж жорстко закріплених країв, на межі з'єднання шарів або в об'ємі компонентів. На таких масштабах класичні підходи механіки руйнування призводять до фізично некоректних нескінченних значень напружень, що зумовлює потребу врахування масштабних ефектів за допомогою теорії поверхневої пружності.

Проблемі дослідження деформацій і руйнування елементів конструкцій з тріщинами, зокрема з урахуванням геометричних обмежень та поверхневих явищ, присвячено значну кількість досліджень українських та закордонних авторів. Розглянемо найбільш важливі дослідження стосовно безпосередньо цієї тематики, а також основних робіт, що забезпечили підґрунтя для одержання вказаних результатів.

Аналіз сучасних досліджень у галузі механіки руйнування свідчить про те, що вагомий внесок у розвиток математичних методів розв'язання задач для тіл із тріщинами внесла низка відомих вчених. Їхні фундаментальні результати, викладені в класичних працях, дозволили врахувати анізотропію властивостей, неоднорідність матеріалів та складні граничні умови на берегах дефектів.

Становлення математичного апарату механіки руйнування нерозривно пов'язане з розвитком базових методів теорії пружності. Класичний фундамент двовимірної теорії пружності за допомогою методів теорії функцій комплексної

змінної закладено в монографії N.I. Muskhelishvili [83]. Застосування цього методу для неоднорідної пластини, яка містить лінійні розрізи викладено в роботі Д.В. Грилицького [1]. Наступний крок у напрямку ускладнення моделей матеріалів зробили Eshelby, J.D., Read, W.T., Shockley, W., [50], Stroh A.N. [102] та S. G. Lekhnitskii [75], присвятивши свої праці теорії пружності анізотропного тіла. Важливе значення для розвитку механіки дефектів мали також дослідження Г. Н. Савіна [24], результати яких стали теоретичною основою для здійснення граничного переходу від гострих макро- та мікронадрізів до математичних розрізів і тріщин.

Питання безпосереднього моделювання розвитку тріщин та критеріїв їхнього росту детально висвітлені у праці G. P. Cherepanov [37], де глибоко описано математичний апарат механіки крихкого руйнування, енергетичні критерії за складних умов навантаження, а також теорію інваріантних інтегралів, які використовуються для розрахунку швидкості звільнення енергії. У свою чергу, В. В. Панасюк у своїй базовій праці [21] сформулював класичні критерії граничної рівноваги крихких тіл із тріщинами. Розширюючи класичні підходи, V. I. Mossakovskii [81] запропонував узагальнення енергетичного критерію руйнування Гріффітса-Снеддона для оцінки міцності та траєкторій розвитку тріщин у неоднорідних пружних тілах.

Подальший розвиток та систематизація двовимірних задач відображені у роботах М. П. Саврука [25], який узагальнив ефективні підходи до їх розв'язання. Крім того, у спільній монографії В. В. Панасюка, М. П. Саврука та А. П. Дацишина [22] було систематизовано розв'язки задач про розподіл напружень біля тріщин, що стало важливим теоретичним підґрунтям для моделювання руйнування елементів конструкцій скінченної товщини (зокрема, тонких смуг та накладок).

Вагомим кроком ускладнення геометрії та умов навантаження став розвиток тривимірних і динамічних моделей. Монографія Г. С. Кіта та М. В. Хая [7] присвячена застосуванню методу потенціалів для розрахунку тривимірних температурних полів і напружень у пружних тілах із тріщинами. Тоді як у праці

Г. С. Кіта та О. В. Побережного [6] досліджено динамічні процеси, хвильові явища та теплові удари в деформівних твердих тілах із тріщинами та включеннями. Розробці загальних математичних методів для розрахунку концентрації напружень біля штампів, розрізів, тонких включень і підкріплень у пружних тілах присвячена робота Г. Я. Попова [23].

Значний внесок у дослідження специфічних умов експлуатації конструкцій зробили О. М. Гузь [2] та А. О. Камінський [3, 4]. О. М. Гузь із співавторами у серії своїх праць розвинув некласичні проблеми механіки руйнування, дослідивши крихке руйнування матеріалів із початковими (залишковими) напруженнями. А. О. Камінський присвятив фундаментальні праці механіці руйнування в'язко-пружних тіл.

Розвиваючи цей напрямок для гетерогенних середовищ, А. О. Камінський, Л. А. Кіпніс та В. А. Колмакова [5] у межах плоскої статичної задачі виконали теоретичний розрахунок міжфазної тріщини. Ними запропоновано модифіковану модель Дагдейла для оцінки напружено-деформованого стану та визначення довжини пластичних зон на межі з'єднання різнорідних матеріалів.

Сучасний етап розвитку механіки руйнування характеризується дослідженням складних багатокомпонентних середовищ та взаємодії фізичних полів різної природи. Л. А. Фільштинський [28] розробив методи математичного моделювання фізичних полів у кусково-однорідних деформівних тілах із розрізами, що знайшло безпосереднє застосування в механіці композитних та неоднорідних середовищ. Фундаментальні основи електромагнітопружності п'єзоелектричних та електропровідних тіл заклали V. Z. Parton, B. A. Kudryavtsev [87]. Запропоновані ними підходи дозволили успішно моделювати крайові задачі для тріщин за умов взаємодії пов'язаних механічних та електричних полів. Базовою працею, яка відкрила для світової науки основні відомості про структуру та фізичні властивості квазікристалів, є дослідження D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias та J. W. Cahn [96]. У контексті анізотропних і складних кристалічних середовищ фундаментальний крок зробив A. N. Stroh [102],

запропонувавши шестивимірний матричний формалізм, який об'єднав комплексні потенціали з теорією дислокацій та тріщин.

З погляду успішного обчислювального аналізу, ключове значення мають методи зведення складних диференціальних крайових задач до зручних для розрахунку форм. Зокрема, у роботі F. Erdogan, G. D. Gupta та T. S. Cook [49] було систематизовано та детально викладено математичний апарат, який дозволяє зводити складні задачі для тіл із тріщинами до системи сингулярних інтегральних рівнянь (CIP) та ефективно розв’язувати їх чисельними методами.

Тріщина між двома матеріалами

Аналізу поведінки тріщин, розташованих на межі поділу двох матеріалів, присвячена значна кількість наукових праць. Дослідження цієї проблеми розвивалося від класичних аналітичних розв'язків для ізотропних середовищ до моделювання складних багатопольових процесів у сучасних смарт-матеріалах.

Основоположною у цьому напрямку є робота M. L. Williams [116], у якій було сформульовано та успішно розв’язано задачу для тріщини, розташованої на межі поділу двох різних ізотропних півплощин під дією рівномірно розподіленого на нескінченності розтягувального навантаження. Згодом J. R. Rice та G. C. Sih [92] запропонували й розв’язали плоскі задачі для міжфазних дефектів за різних граничних умов на берегах тріщини та варіативних видів віддаленого навантаження. Ефективну методику сингулярних інтегральних рівнянь (CIP) для дослідження плоскої задачі про кусково-однорідні тіла з тріщинами було реалізовано у праці Г. Т. Сулима та Д. В. Грилицького [26].

Розвиток класичної теорії виявив фізичну суперечність – так зване взаємопроникнення (насування) берегів тріщини у безпосередній близькості до її вершин. Для усунення цього ефекту було запропоновано концепцію зон контакту (Comninou, M., [38], I. V. Simovov [101]).

Аналітичні розв’язки для тріщини з однією та двома зонами контакту за різних видів зовнішнього навантаження були одержані у працях В. В. Лободи

[15], В. І. Острика та А. Ф. Улітка [16-18], C. Atkinson [31, 32], A. K. Gautesen [54-57], K. P Herrmann [61]. У цих роботах детально досліджено взаємний вплив зон контакту та закономірності зміни локальних полів деформації. Чисельне розв’язання СІР, що описують плоскі задачі для тріщин із зонами контактної взаємодії берегів, представлено у працях J. Dundurs, M. Comninou [39] та L. Ni, S. Nemat-Nasser [85-86].

Праці А. Ф. Улітка та В. І. Острика [27] присвячені дослідженню взаємодії берегів міжфазної тріщини з урахуванням сил тертя за умов одночасного розтягу та зсуву композитного матеріалу. У роботі А. В. Павленка та Т. С. Кагадій [19] розв'язано контактну задачу для ортотропної напівсмуги з урахуванням сил тертя на границі, а у співавторстві з І. В. Щербиною [20] представлено розв'язок задачі Галіна про тиск штампа для ортотропного прямокутника скінченних розмірів.

Окрему групу досліджень становлять роботи, де враховуються внутрішні властивості та анізотропія матеріалів. Питання міжфазних тріщин в анізотропних середовищах детально розглянуто у працях C. Hwu [67], а також W. Quan та C. T. Sun [91]. T. C. T. Ting у своїх роботах [106-108] аналітично описав характер осциляції полів напружень і переміщень поблизу тріщини на межі поділу двох анізотропних матеріалів. Він математично обґрунтував, що ступінь цієї осциляції залишається незмінною, якщо відносна орієнтація головних осей анізотропії середовищ є фіксованою.

Особливої уваги заслуговують дослідження дефектів в обмежених за геометрією тілах – однорідних і різнорідних смугах. F. Erdogan [48] проаналізував НДС трьох неоднорідних матеріалів із внутрішніми та міжфазними тріщинами. F. Delale та F. Erdogan [44] розглянули еластостатичну задачу для неоднорідної площини, яка складається з двох наборів періодично розташованих різнорідних ортотропних смуг. A. Birinci, F. Birinci, F. L. Cakiroglu та R. Erdol [33] дослідили центральну тріщину в нескінченній смузі під дією внутрішнього тиску та зосереджених сил на її краях. Аналітичне розв'язання для напружень і переміщень у напівнескінченній смузі, виготовленій із

анізотропного матеріалу, запропоновано у роботі M. Z. Wang, T. C. T. Ting та G. Yan [113].

Важливим кроком уперед став перехід від концепції кускової однорідності до матеріалів із безперервно змінними властивостями. Дослідження тріщин у неоднорідному середовищі з постійним коефіцієнтом Пуассона та експоненціально змінним модулем Юнга представлено в роботі F. Delale та F. Erdogan [43], а N. Konda та F. Erdogan [73] узагальнили цю задачу для довільного кута відносно напрямку градієнта матеріалу.

Сингулярну природу поля напружень у вершині тріщини, яка є перпендикулярною до межі розділу двох зв'язаних півпросторів за антиплоського зсуву, досліджено F. Erdogan [47]. Додатково F. Delale та F. Erdogan [42] вивчили випадки, коли один із матеріалів має неоднорідні властивості безпосередньо в зоні взаємодії, продемонструвавши вплив градієнта на характер сингулярності. Тріщину між двома різними неоднорідними півплощинами досліджено N. I. Shbeeb, W. K. Binienda та K. L. Kreider [97], де показано залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень від співвідношення параметрів градієнтів пружності. Робота Z. Cheng та Z. Zhong [36] присвячена скінченній тріщині постійної довжини, що поширюється у функціонально-градієнтній смузі між двома різнорідними однорідними шарами під дією площинного навантаження.

Нещодавні публікації значною мірою зосереджені на зв'язаних фізичних полях (п'єзоелектричні середовища, п'єзоелектромагнітні смуги та квазікристали). P. Pei, G. Yang, Y. Shi та C. F. Gao [88] представили аналітичний метод дослідження п'єзоелектриків із періодичними тріщинами з урахуванням напруження Максвелла. Робота V. Loboda, A. Sheveleva та інших присвячена біматеріальному п'єзоелектричному простору в умовах плоскої деформації за наявності колінеарних електрично обмежених проникних тріщин [79].

R. Enrico та M. M. Paolo [46] дослідили стаціонарні прямі тріщини в квазікристалах у лінійно-пружній постановці. Плоскі задачі для кубічних квазікристалічних середовищ, що містять еліптичний отвір за рівномірних

дистанційних навантажень, на основі методу комплексного потенціалу розв'язано в роботі [53]. K. Q. Hu [63] розглянув тріщину на межі розділу між різнорідними одновимірними (1D) гексагональними квазікристалами з п'єзоелектричним ефектом під дією антиплощинного зсуву та площинних електричних навантажень. Цей напрямок отримав розвиток у праці K. Q. Hu та C-F. Gao [62], де розглядається взаємодія колінеарних інтерфейсних тріщин, а також у дослідженнях A. Sheveleva, O. V. Komarov, I. Y. Gergel, V. V. Loboda [98] щодо системи тріщин. V. Loboda, A. Sheveleva, O. Komarov et al [79] узагальнили цей підхід на випадок шаруватих п'єзоелектричних квазікристалів, виявивши вплив взаємодії дефектів на КІН та швидкість вивільнення енергії. V. Govorukha та M. Kamlah [58] розширили ці задачі, розглянувши змішані електричні граничні умови та показавши модулювання КІН через частковий електричний контакт берегів. Тривимірні тріщини в 1D гексагональних п'єзоелектричних квазікристалах досліджено в роботі [51].

У роботі [100] розглядається проблема міжфазних тріщин антиплоского ковзання (тип III) між звичайним пружним матеріалом та одновимірним гексагональним квазікристалом. Для 1D квазікристалів з п'єзоелектричним ефектом розв'язано задачу для нескінченної площини, що складається з двох різних квазікристалічних півплощин [125]. У серії робіт [126-128] аналітично-чисельним методом досліджено електрично непроникну тріщину в 1D гексагональному термоелектропружному квазікристалічному біматеріалі. Водночас у праці [129] детально досліджуються дві колінеарні проникні антиплощинні тріщини однакової довжини, що лежать у середній площині 1D гексагональної п'єзоелектричної квазікристалічної стрічки.

Специфічний пласт сучасних задач стосується взаємодії дефектів із активними елементами електронних пристроїв. Питання взаємодії електрода з електропровідною тріщиною безпосередньо на інтерфейсі досліджено в [99]. Взаємодія провідних та проникних колінеарних тріщин на межі розділу 1D п'єзоелектричних квазікристалів вивчалася в [80], а вздовж межі

п'єзоелектричних матеріалів під дією антиплощинного механічного навантаження і площинних електричних полів в [78].

Розвиваючи теорію на магнітопружні середовища, P. R. Verma та R. R. Verma [110] розглянули задачу утворення тріщини типу III для п'єзоелектромагнітної смуги, ослабленої двома поперечно орієнтованими напівпроникними колінеарними тріщинами під дією позаплощинного зсуву, площинного електричного зміщення та магнітної індукції. У роботі P. R. Verma [109] запропоновано модель магнітної «текучості» (strip-yield model) для аналогічної нескінченно довгої п'єзоелектромагнітної смуги.

Чисельні методи аналізу матеріалів з тріщинами

Очевидно, що сучасний спектр задач механіки руйнування матеріалів не обмежується ідеалізованими випадками безмежних або напівбезмежних областей. Реальна інженерна практика потребує точного оцінювання міцності та довговічності конструкційних елементів скінченних розмірів, що мають складну геометричну конфігурацію.

Для аналізу таких об'єктів необхідне застосування різноманітних чисельних методів, передусім – методу скінченних елементів (МСЕ), теоретичні та практичні основи якого детально висвітлено у фундаментальній праці O. C. Zienkiewicz та R. L. Taylor [130].

При практичній реалізації МСЕ для задач інтерфейсного руйнування критично важливою проблемою є адекватне і коректне моделювання механічних граничних умов – як безпосередньо на берегах тріщин (зокрема, з урахуванням їхньої можливої контактної взаємодії), так і на границях розділу різнорідних матеріалів.

Крім того, в механіці руйнування важливу роль відіграє достовірне визначення таких параметрів, як: величина розкриття тріщини; коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для різних типів деформації; значення J-інтеграла; швидкість вивільнення енергії та інші.

Ці питання, що лежать на стику обчислювальної математики та механіки деформівного твердого тіла, знайшли широке відображення у працях N. Aravas і R. M. McMeeking [30], E.F. Rybicki, M.F. Kanninen [94] та інших.

Врахування поверхневих ефектів

У макроскопічних моделях механіки руйнування напруження у вершинах тріщин виявляються нескінченними, що є прямим наслідком припущення про ідеально гостру геометрію дефекту. Фактично, нескінченно гостра тріщина в континуумі є математичною абстракцією, оскільки на нанорівні реальні тріщини мають скінченний радіус закруглення, сумісний із наномасштабом. На цьому рівні, коли співвідношення площі поверхні до об’єму тіла стає значним, поверхнева пружність починає суттєво впливати на загальний напружено-деформований стан. Це вказує на те, що більш точний та фізично адекватний аналіз області поблизу дефекту може бути досягнутий лише з урахуванням наномасштабних поверхневих ефектів [104].

Найбільш відома континуальна модель, яка описує ці явища, була запропонована в роботі M. E. Gurtin та A. I. Murdoch [59]. У ній поверхня розглядається як тонка пружна мембрана, ідеально з’єднана з основним матеріалом (матрицею). Надалі ця модель була розвинена та адаптована під різні фізико-геометричні умови. Узагальнення для криволінійних поверхонь розділу двох матеріалів здійснено у праці M. E. Gurtin, J. Weissmuller та F. Larche [60]. Геометричне обґрунтування моделі, а також детальне уточнення та верифікація її різних версій наведені в роботі C. Q. Ru [93]. Модель Гуртина-Мердока стала класичною основою для аналізу широкого класу нанорозмірних дефектів у працях P. Sharma та S. Ganti [95].

Врахування поверхневої пружності дозволило переглянути класичні уявлення про сингулярність полів напружень. Поверхневі ефекти для тріщин типів I та II в однорідних ізотропних тілах досліджувалися в роботі [68]. Для

міжфазних тріщин на межі поділу двох матеріалів аналогічні задачі розв'язано в [69] та [115] для ізотропних та анізотропних біматеріалів відповідно. Авторами було доведено, що врахування поверхневої пружності повністю усуває класичну сингулярність біля вершин тріщин. У роботі [65] досліджується двовимірна задача руйнування для тріщини типів I та II, вбудованої в пружну тонку плівку з поверхневим ефектом, де проведено аналіз нескінченної ізотропної однорідної пружної тонкої плівки під дією площинного навантаження. У роботі [123] детально досліджується задача плоскої деформації для нанорозмірної тріщини на межі розділу, розташованої між двома пружними півплощинами.

Поведінка тріщин поздовжнього зсуву з урахуванням поверхневих напружень вивчалася у значній кількості досліджень. Основний масив розв'язків для типу III представлено в роботах C. I. Kim, P. Schiavone, C. Q. Ru [70, 71], J. R. Walton [111], G.-F. Wang та ін. [112], а також Y. Yang, Z. L. Hu, X. F. Li [120]. Зокрема, у роботі G.-F. Wang та співавторів [112] аналізувався внесок поверхневих ефектів у напруження виключно в безпосередньому околі вершини. Більш повний загальний розв’язок аналогічної задачі отримано в [71], проте без урахування можливого навантаження безпосередньо на берегах дефекту. J. R. Walton [112] дослідив вплив поверхневої пружності на дугоподібну тріщину в лінійно-пружному ізотропному однорідному матеріалі. У роботі [120] вивчено тріщину типу III, вбудовану в однорідний ізотропний шар нанорозмірної скінченної товщини. Y. A. Antipov та P. Schiavone [29] провели точне дослідження крайової задачі для скінченної тріщини в нескінченній смузі. Для складніших середовищ, таких як функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), у роботі [121] проаналізовано вплив поверхневої пружності на коефіцієнт інтенсивності напружень для антиплоскої тріщини, інтегрованої в пружну стрічку. Задача про нанотріщину типу III на межі розділу між двома зв'язаними різнорідними матеріалами під антиплоским зсувним навантаженням розв'язана у праці [122]. Важливим етапом розвитку математичного моделювання став перехід до тривимірних і осесиметричних нанозадач. У статті [119] проаналізовано задачу кручення для нанорозмірної тріщини у формі копійки

(penny-shaped crack) в нескінченному однорідному ізотропному пружному середовищі з поверхневою пружністю на її межі. Водночас T. B. Nguyen, J. Rungamornrat та T. Senjuntichai [84] запропонували ефективну числову процедуру для обчислювального аналізу плоских тріщин довільної форми в тривимірному лінійно-пружному нескінченному середовищі з урахуванням поверхневих ефектів.

Окремий інтерес становлять задачі про неоднорідності та включення з урахуванням масштабних ефектів на межі контакту фаз. Процедуру врахування додаткового впливу поверхневих напружень у задачі про тонке міжфазне включення в біматеріалі запропонували Y.Z. Piskozub, H.T. Sulym [90]. Вплив поверхневого натягу безпосередньо на антиплоску деформацію біматеріалу з тонким міжфазним мікровключенням, а також можливість неідеального контакту між включенням і матрицею досліджено в роботі [89]. Специфічну задачу для частково затиснутої гнучкої ультратонкої пружної нанопластини з поверхневим ефектом розв'язали Z. Hu, X. Zhang та X.-F. Li [64], зосередившись на аналізі сингулярної пружної поведінки поблизу кутових точок закріпленої межі.

В інтелектуальних матеріалах класична модель Гуртина-Мердока потребує розширення через взаємодію механічних, електричних та специфічних внутрішніх полів. Поверхнева п’єзоелектрика та діелектрика враховують виникнення локальних електричних полів на поверхні нанодефектів.

Різні математичні формулювання такої розширеної моделі представлені у працях G. Y. Huang, S. W. Yu [66] та S. Dai et al. [40]. Зокрема, у роботі X. Wang та K. Zhou [114] поверхневі ефекти успішно враховано для гексагонального п’єзоелектричного матеріалу з прямолінійною тріщиною.

Подібні підходи застосовуються і до квазікристалів, де фононно-фазонна взаємодія відіграє роль, аналогічну електромеханічному спряженню в п’єзоелектриках [52]. Поверхневі ефекти для тріщин, що відходять від нанорозмірних отворів у п'єзоелектричних квазікристалах, досліджено у роботах

Y. Y. Xin, J. H. Xiao [117, 118] та X. F. Zhao, Y. Y. Ma, S. N. Lu [128]. Додатково у роботі [117] детально досліджено характеристики руйнування за довільної локалізації наскрізної тріщини типу III на краю нанокруглого отвору в одновимірних (1D) гексагональних квазікристалах. M. Su та J. Xiao [103] виконали детальний аналіз задачі руйнування для системи чотирьох нанотріщин типу III, що виходять з нанорозмірного еліптичного отвору в 1D гексагональних п'єзоелектричних квазікристалах. У дослідженні H. Y. Dang , K. Luo , M. H. Zhao, C. Lu, Z. T. Chen, C. Y. Fan [41] вивчено термічно індуковану осесиметричну міжфазну поведінку частково розшарованої двовимірної (2D) гексагональної квазікристалічної системи плівка-підкладка з явним урахуванням поверхневих ефектів на межі контакту.

Таким чином, із вказаного огляду випливає, що на теперішній час найбільш повно досліджені макроскопічні задачі механіки руйнування для однорідних і кусково-однорідних середовищ, зокрема з урахуванням контактної взаємодії берегів тріщин та зв'язаності фізико-механічних полів у п'єзоелектриках і квазікристалах. Натомість поза увагою дослідників часто залишається моделювання напружено-деформованого стану в обмежених за геометрією елементах конструкцій (смугах, накладках, тонких плівках) на мікро- та нанорозмірному рівнях, де класичні континуальні підходи призводять до нескінченних значень напружень у вершинах тріщин. Крім того, потребують подальшого розвитку методи зведення відповідних крайових задач із поверхневими ефектами до систем сингулярних інтегральних рівнянь та розробка стійких чисельних алгоритмів їх розв'язання.

Враховуючи вказані обставини, а також потребу інженерної практики в точному оцінюванні міцності високотехнологічних приладів і мікросистем, вибрану тему дослідження для матеріалів із тріщинами від мікро- до нанорівня, в тому числі з урахуванням масштабних та поверхневих ефектів за теорією Гуртина-Мердока, можна вважати актуальною.

Мета і завдання дослідження. *Мета роботи* полягає у розробці аналітико-числових методів для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій з тріщинами на мікро- та нанорівнях, зокрема у тонких накладках, біматеріальних з'єднаннях та квазікристалах, в тому числі з урахуванням масштабних ефектів (поверхневої пружності) та особливостей геометричного закріплення.

Для досягнення поставленої мети було визначено та розв'язано такі *завдання*:

- розробити аналітичний метод розв'язання задачі про плоску деформацію мікротріщини, розташованої вздовж жорстко закріпленого краю тонкої пружної накладки та на межі з'єднання двох ізотропних шарів (смуг);
- використовуючи модель поверхневої пружності Гуртина-Мердока, дослідити НДС біматеріального тіла з міжфазною нано-тріщиною. Проаналізувати, як властивості поверхневої «мембрани» змінюють розподіл напружень у вершинах тріщин нанометрових розмірів;
- вивчити антиплоску деформацію у складних структурах. Для цього розв'язати задачі про антиплоский зсув для нанотріщин в ізотропних тілах та лінійних квазікристалах з урахуванням фононно-фазонного зв'язку та поверхневих напружень;
- для різних властивостей поверхневих шарів показати можливість усунення класичної кореневої сингулярності напружень у вершині тріщини за рахунок врахування поверхневої пружності, що дозволяє отримати скінченні значення фізичних полів.

Об'єкт дослідження – процеси деформування та руйнування пружних середовищ (тонких шарів, біматеріалів, квазікристалів), що містять дефекти типу тріщин на мікро- та нанорівнях.

Предмет дослідження – НДС та параметри руйнування мікро та нано-тріщин з урахуванням розміру дефектів та поверхневих ефектів.

Методи дослідження. Для побудови й аналізу математичних моделей використовується механіка деформівного твердого тіла, лінійна механіка руйнування, теорія поверхневої пружності (модель Гуртина–Мердока) та теорія пружності квазікристалів. Математичний апарат базується на методах інтегральних перетворень Фур'є та теорії сингулярних інтегральних рівнянь, а для чисельного розв'язання застосовано метод квадратур Гауса-Чебишева та метод скінченних елементів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному**:**

1. Виконано аналіз напружено-деформованого стану тонких пружних накладок та біматеріальних смуг із мікротріщинами, що дозволило встановити межі застосовності класичних розв'язків для півплощини та виявити суттєве зростання параметрів руйнування при значному зменшенні товщини конструктивних елементів. Проведено порівняння отриманих аналітичних результатів із чисельним моделюванням методом скінченних елементів
2. Реалізовано методику дослідження міжфазних нанотріщин у біматеріальних з'єднаннях з урахуванням масштабних ефектів на основі моделі Гуртина-Мердока. Вперше враховано різні механічні характеристики поверхневих шарів на нижньому і верхньому берегах тріщини. Встановлено, що врахування пружних властивостей поверхневої «мембрани» суттєво змінює розподіл напружень біля вершин тріщин нанометрових розмірів, що має вирішальне значення для оцінки надійності композитних наноструктур.
3. З використанням аналітичного розв'язку для антиплоскої деформації проведено чисельний аналіз полів напружень та деформацій у лінійних квазікристалах та наноструктурах із тріщинами. Проаналізовано вплив фононно-фазонного зв'язку та поверхневої пружності, що дозволило визначити кількісні показники розкриття берегів тріщини та встановити умови, за яких усувається класична сингулярність.

4. Запропоновано підхід до аналізу нанотріщин, який базується на теорії поверхневої пружності та методу лінійних дислокацій без використання класичних спрощень лінійної механіки руйнування. Цей підхід дозволяє отримати скінченні значення напружень у вершинах тріщин та виявити виражену розмірну залежність розв'язку, що забезпечує фізично коректний опис процесів деформування у нанорозмірному діапазоні.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується: коректним застосуванням математичного апарату інтегральних перетворень Фур'є та рівнянь лінійної механіки руйнування, теорії пружності квазікристалів і моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока; використанням чисельних методів розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь – метод квадратур Гауса-Чебишева з перевіркою збіжності за кількістю вузлів та членів розкладення; зіставленням отриманих результатів у граничних випадках із відомими класичними розв'язками, зокрема, збіжністю результатів для тонких накладок із розв'язками для пружної півплощини при збільшенні їхньої товщини; порівнянням аналітичних значень параметрів руйнування – розкриття тріщини, швидкість звільнення енергії із результатами, отриманими за допомогою методу скінченних елементів; відповідністю результатів розв'язування задач, зокрема, щодо усунення сингулярності напружень у нанотріщинах фізичній суті досліджуваних масштабних ефектів та принципам енергетичного балансу.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що розроблено комплексні аналітико-числові методики та програмні алгоритми для розрахунку напружено-деформованого стану мікро- та нанорозмірних елементів конструкцій, біматеріальних з'єднань і квазікристалів із тріщинами. Запропоновані підходи дозволяють враховувати вплив геометричних параметрів (товщини накладок) та масштабних ефектів (поверхневої пружності), що забезпечує високу точність прогнозування міцності та тріщиностійкості сучасних композитів.

Одержані результати можуть бути використані в інженерній практиці конструкторських бюро та підприємств, що займаються проєктуванням і виготовленням елементів мікро- та наносистемної техніки, інтелектуальних матеріалів та високотехнологічних сенсорів. Це дозволяє ще на етапі проєктування дати об’єктивну оцінку експлуатаційного ресурсу виробів, вибрати коректні розрахункові моделі тріщин, та забезпечити надійну роботу конструкцій у критичних умовах навантаження.

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації опубліковано 5 статей. Всі вони входять до переліку наукових фахових видань України [8, 10, 12, 14, 72]. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень належить науковому керівнику В. В. Лободі. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому: [8, 72] – побудова аналітичних розв’язків, їхня чисельна реалізація, проведення скінченно-елементного аналізу, візуалізація результатів; [10, 12] – побудова аналітичних розв’язків, їх чисельна реалізація та аналіз результатів; [14] – побудова та розв’язок інтегральних рівнянь, візуалізація та аналіз результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на підсумкових наукових конференціях Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2023-2026 років; а також на конференціях:

1. Математичні проблеми технічної механіки – Дніпро. 18–19 квітня 2024 р.
2. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем – Дніпро. 19–21 листопада 2025 р.
3. Всеукраїнському Симпозіумі «Механіка суцільного середовища і міцності конструкцій» до 150-річча від дня народження академіка АН України Олександра Миколайовича Динника, Дніпро. 19–20 лютого 2026 р.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалась у відповідності з індивідуальним планом підготовки аспіранта кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Дослідження за темою дисертації здійснювалися також в науково-дослідній лабораторії механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара в рамках держбюджетної теми 1-677-24 «Розрахункові моделі п'єзоактивних кристалічних та квазікристалічних композитів з тріщинами на межі поділу матеріалів», номер державної реєстрації № 0124U000330, 2024–2026 рр.

Структура та обсяг дисертації.

Робота містить вступ, огляд літератури, 4 розділи, висновки та список використаних джерел, що містить 130 найменувань на 13 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 125 сторінки, обсяг основного тексту – 110 сторінок. Робота містить 28 рисунків та 6 таблиць.

Використання засобів штучного інтелекту

Засоби штучного інтелекту застосовувалися виключно як допоміжний технічний інструмент на етапі програмної реалізації дослідження. Зокрема, їх було задіяно для статичного аналізу коду, пошуку та усунення програмних помилок, а також для проведення первинного тестування алгоритмів, сформованих у середовищі Wolfram Mathematica. Усі наукові результати, постановка задач, математичні моделі та висновки дисертаційної роботи отримані та сформульовані автором особисто.

РОЗДІЛ 1. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОНКОЇ НАКЛАДКИ З МІКРОТРІЩИНОЮ ВЗДОВЖ ЇЇ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОГО КРАЮ

1.1 Математична постановка задачі

Розглянемо задачу плоскої деформації мікротріщини $|x| \le b$, яка розташована вздовж жорстко закріпленого краю (при $y = 0$) ізотропного, лінійно пружного, нескінченого шару тонкої накладки товщини h. Тріщина вважається відкритою з рівномірним внутрішнім тиском p_0 на її поверхню. На границю шару в точках $(\pm a, +h)$ симетрично діє пара стискальних/розтягувальних зосереджених сил $P/2$ (рис. 1.1).

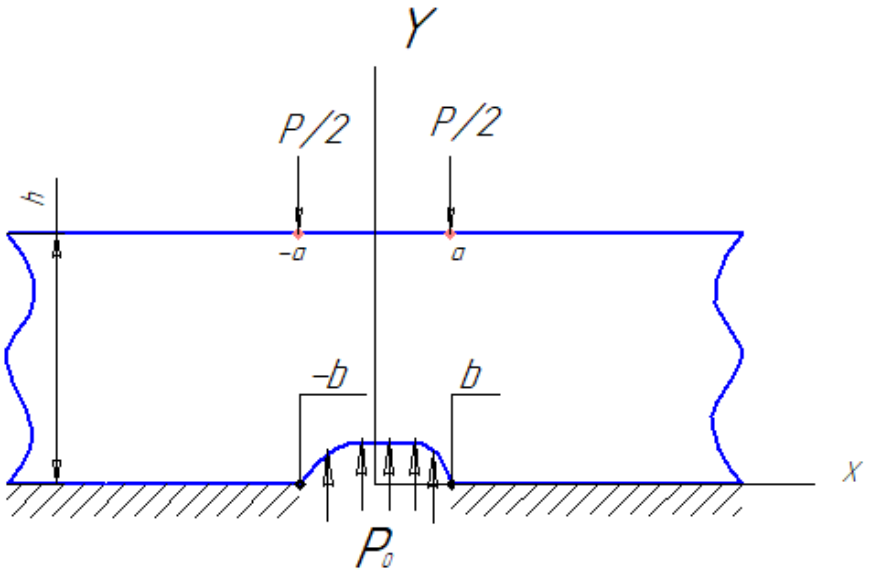


Рис. 1.1. Тріщина вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки (плоский випадок)

Для вирішення цієї задачі потрібно розв'язати змішану крайову задачу, яка описується системою диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних

$$\mu\, \Delta^2 u(x,y) + \frac{2\mu}{\kappa - 1}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right) = 0, \qquad (1.1)$$

$$\mu\ \Delta^2 v(x,y)+\frac{2\mu}{\kappa-1}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)=0, \tag{1.2}$$

з крайовими умовами, які завдяки симетрії можна записати у вигляді:

$$\tau_{xy}(x,0)=0,\ 0\le x\le b, \tag{1.3}$$

$$\tau_{xy}(x,h)=0,\ 0\le x\le\infty, \tag{1.4}$$

$$\sigma_y(x,h)=\frac{P}{2}\delta(x-a),\ 0\le x\le\infty, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}=0, b\le x\le\infty \tag{1.6}$$

$$\sigma_y(x,0)=-p_0,\ 0\le x<b, \tag{1.7}$$

де $\kappa=\begin{cases}3-4\nu-\text{для плоскої деформації}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu}-\text{для плоского напруженого стану}\end{cases}$,

μ і ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона, відповідно.

1.2 Побудова аналітичного розв'язку крайової задачі

Застосовуючи до рівнянь (1.1), (1.2) інтегральні перетворення Фур'є

$$\bar{u}(\alpha,y)=\int_0^\infty u(x,y)sin(\alpha x)dx,\ \bar{v}(\alpha,y)=\int_0^\infty v(x,y)cos(\alpha x)dx,$$

отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь.

Знаходячи загальний розв'язок цієї системи і застосовуючи до нього обернене перетворення Фур'є

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{u}(\alpha,y)sin(\alpha x)d\alpha,\ v(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{v}(\alpha,y)cos(\alpha x)d\alpha,$$

отримуємо

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[(A+By)e^{-\alpha y}+(C+Dy)e^{\alpha y}\right]sin(\alpha x)\,d\alpha, \tag{1.8}$$

$$v(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(A+\left(\frac{k}{\alpha}+y\right)B\right)e^{-\alpha y}+\left(-C+\left(\frac{k}{\alpha}-y\right)D\right)e^{\alpha y}\right]cos(\alpha x)d\alpha\,. \quad (1.9)$$

де A, B, C, D є невідомі константи, які можуть бути знайдені із граничних умов (1.3)-(1.6) при $y=h$ і $y=0$ відповідно.

Згідно з законом Гука необхідні компоненти тензора напружень обчислюються через компоненти вектора переміщень за формулами:

$$\sigma_{yy}(x,y)=(\lambda+2\mu)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\mu}\tau_{xy}(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

де λ і μ – пружні константи Ляме.

З останніх рівнянь і (1.8), (1.9) отримуємо

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[-\alpha(A+By)-B\frac{\kappa-1}{2}\right]e^{-\alpha y}+\right.$$

$$\left.+\left[\alpha(C+Dy)-D\frac{\kappa-1}{2}\right]e^{\alpha y}\right\}sin(\alpha x)d\alpha\,. \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{yy}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[-\alpha(A+By)-\frac{1+\kappa}{2}B\right]e^{-\alpha y}+\right.$$

$$\left.+\left[-\alpha(C+Dy)+\frac{1+\kappa}{2}D\right]e^{\alpha y}\right\}cos(\alpha x)d\alpha\,. \quad (1.11)$$

Введемо невідомі функції

$$f_1(x)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial x},\ f_2(x)=\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}\ \text{на}\ 0\le x\le b\,. \quad (1.12)$$

Тоді, задовольняючи граничним умовам (1.4)-(1.6) і знаходячи невідомі константи, підставимо знайдені A, B, C, D до (1.10), (1.11), що з урахуванням умови (1.12) дає

$$\tau_{xy}(x,0)=\frac{4\mu}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{g_{\tau 1}(\alpha)\bar{f}_1(\alpha)+g_{\tau 2}(\alpha)\bar{f}_2(\alpha)\right\}sin(\alpha x)d\alpha+S_1(x) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{yy}(x,0)=-\frac{4\mu}{\pi}\int_0^\infty\left\{g_{\sigma1}(\alpha)\bar{f}_1(\alpha)+g_{\sigma2}(\alpha)\bar{f}_2(\alpha)\right\}cos(\alpha x)d\alpha+S_2(x) \qquad (1.14)$$

де

$$g_{\tau1}(\alpha)=\frac{-(1+\kappa)\left[2\alpha h+sh(2\alpha h)\right]}{D_1(\alpha)},\ g_{\tau2}(\alpha)=\frac{(1-\kappa)\left[1-ch(2\alpha h)\right]+4\alpha^2h^2}{D_1(\alpha)}$$

$$g_{\sigma1}(\alpha)=\frac{(1-\kappa)\left[1-ch(2\alpha h)\right]+4\alpha^2h^2}{D_1(\alpha)},\ g_{\sigma2}(\alpha)=\frac{(1+\kappa)\left[2\alpha h-sh(2\alpha h)\right]}{D_1(\alpha)}$$

$$S_1(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{(-1+\kappa)sh(\alpha h)-2\alpha h\,ch(\alpha h)}{D_1(\alpha)}(1+\kappa)Pcos(a\alpha)\right\}sin(\alpha x)d\alpha$$

$$S_2(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{(1+\kappa)ch(\alpha h)+2\alpha h\,sh(\alpha h)}{D_1(\alpha)}(1+\kappa)Pcos(a\alpha)\right\}cos(\alpha x)d\alpha$$

$$D_1(\alpha)=1+\kappa^2+4\alpha^2h^2+2\kappa ch(2\alpha h)$$

$$\bar{f}_1(\alpha)=\int_0^\infty f_1(t)cos(\alpha t)dt,\ \bar{f}_2(\alpha)=\int_0^\infty f_2(t)sin(\alpha t)dt, \qquad (1.15)$$

Враховуючи поведінку функцій $g_{\tau1}(\alpha)$, $g_{\tau2}(\alpha)$, $g_{\sigma1}(\alpha)$ і $g_{\sigma2}(\alpha)$ при $\alpha\to\infty$:

$$g_{\tau1}(\alpha)=\frac{-(1+\kappa)\left[2\alpha h+sh(2\alpha h)\right]}{1+\kappa^2+4\alpha^2h^2+2\kappa ch(2\alpha h)}\Big|_{\alpha\to\infty}=\frac{-(1+\kappa)\left[exp(2\alpha h)\right]}{2\kappa exp(2\alpha h)}=-\frac{1+\kappa}{2\kappa}$$

$$g_{\tau2}(\alpha)=\frac{(1-\kappa)\left[1-ch(2\alpha h)\right]+4\alpha^2h^2}{D_1(\alpha)}\Big|_{\alpha\to\infty}=\frac{\kappa-1}{2\kappa}$$

$$g_{\sigma1}(\alpha)=\frac{(1-\kappa)\left[1-ch(2\alpha h)\right]+4\alpha^2h^2}{D_1(\alpha)}\Big|_{\alpha\to\infty}=\frac{\kappa-1}{2\kappa}$$

$$g_{\sigma2}(\alpha)=\frac{(1+\kappa)\left[2\alpha h-sh(2\alpha h)\right]}{D_1(\alpha)}\Big|_{\alpha\to\infty}=\frac{1+\kappa}{2\kappa}$$

представимо ці функції у наступному вигляді:

$$g_{\tau1}(\alpha)=-\kappa_1+\tilde{g}_{\tau1}(\alpha),\ g_{\tau2}(\alpha)=\kappa_2+\tilde{g}_{\tau2}(\alpha),$$

$$g_{\sigma1}(\alpha)=\kappa_2+\tilde{g}_{\sigma1}(\alpha),\ g_{\sigma2}(\alpha)=-\kappa_1+\tilde{g}_{\sigma2}(\alpha) \qquad (1.16)$$

де $\kappa_1 = \dfrac{\kappa+1}{2\kappa}$, $\kappa_2 = \dfrac{\kappa-1}{2\kappa}$, а функції $\tilde{g}_{\tau 1}(\alpha)$, $\tilde{g}_{\tau 2}(\alpha)$, $\tilde{g}_{\sigma 1}(\alpha)$ і $\tilde{g}_{\sigma 2}(\alpha)$ прямують до нуля при $\alpha \to \infty$.

Враховуючи представлення (1.15), (1.16), а також наступні формули

$$2\cos(\alpha x)\sin(\alpha t) = \sin\alpha(t+x) + \sin\alpha(t-x)$$

$$2\sin(\alpha x)\sin(\alpha t) = \cos\alpha(x-t) - \cos\alpha(x+t)$$

$$2\cos(\alpha x)\cos(\alpha t) = \cos\alpha(x+t) + \cos\alpha(x-t)$$

$$\int_0^\infty f_i(t)\int_0^\infty \sin(\alpha t)\sin(\alpha x)\,d\alpha\,dt = \frac{\pi}{2} f_i(x) \ (i=1,2),$$

$$\int_0^\infty e^{-\eta\alpha}\sin\alpha(x \mp y)\,d\alpha = \frac{1}{x \mp y} \text{ при } \eta \to 0.$$

вирази для напружень (1.13), (1.14) після низки перетворень можна представити у вигляді:

$$\frac{\tau_{xy}(x,0)}{2\mu} = \frac{\kappa_1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1(t)}{t-x}dt + \kappa_2 f_2(x) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\left[f_1(t)\hat{R}_{11}(x,t) + f_2(t)\hat{R}_{12}(x,t)\right]dt + \frac{S_1(x)}{2\mu} \qquad (1.17)$$

$$\frac{\sigma_{yy}(x,0)}{2\mu} = -\kappa_2 f_1(x) + \frac{\kappa_1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(t)}{t-x}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\left[f_1(t)\hat{R}_{21}(x,t) + f_2(t)\hat{R}_{22}(x,t)\right]dt + \frac{S_2(x)}{2\mu}, \qquad (1.18)$$

де $\hat{R}_{11}(x,t) = \int_0^\infty\left[\tilde{g}_{\tau 1}(\alpha)\sin\alpha(x-t)\right]d\alpha$, $\hat{R}_{12}(x,t) = \int_0^\infty \tilde{g}_{\tau 2}(\alpha)\cos\alpha(x-t)\,d\alpha$

$$\hat{R}_{21}(x,t) = -\int_0^\infty \tilde{g}_{\sigma 1}(\alpha)\cos\alpha(x-t)\,d\alpha,\ \hat{R}_{22}(x,t) = \int_0^\infty \tilde{g}_{\sigma 2}(\alpha)\sin\alpha(x-t)\,d\alpha$$

Задовольняючи тепер граничним умовам (1.3) і (1.7), приходимо до наступної системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1(t)}{t-x}dt+\gamma f_2(x)+\int_{-b}^{b}\left[M_{11}(x,t)f_1(t)+M_{12}(x,t)f_2(t)\right]dt=$$

$$=-\frac{S_1(x)}{2\mu\kappa_1} \tag{1.19}$$

$$-\gamma f_1(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(t)}{t-x}dt+\int_{-b}^{b}\left[M_{21}(x,t)f_1(t)+M_{22}(x,t)f_2(t)\right]dt=$$

$$=-\frac{S_2(x)+p}{2\mu\kappa_1} \tag{1.20}$$

де $\gamma=\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}$, $M_{ij}(x,t)=\hat{R}_{ij}(x,t)/(\pi\kappa_1)$, $i,j=1,2$.

Додаткові умови для цієї системи мають вигляд

$$\int_{-b}^{b}f_1(t)dt=0,\ \int_{-b}^{b}f_2(t)dt=0 \tag{1.21}$$

1.3 Чисельний аналіз аналітичних результатів

Розв'язок системи (1.19), (1.20) має осцилюючу сингулярність біля вершин тріщини, але згідно [124] для знаходження глобальних параметрів руйнування і швидкості звільнення енергії (ШЗЕ) осциляцію можна не враховувати і розшукувати розв'язок цієї системи у формі:

$$f_i(t)=\frac{f_i^*(t)}{\sqrt{b^2-t^2}}\ \text{(i=1,2)} \tag{1.22}$$

Підставляючи (1.22) в (1.19)-(1.21) і переходячи за допомогою заміни $x=br,\quad t=bs$ до проміжку [-1,1], одержуємо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1^*(s)ds}{(s-r)\sqrt{1-s^2}}+\frac{\gamma\psi_2^*(r)}{\sqrt{1-r^2}}+b\int_{-1}^{1}\left[M_{11}(x,t)\frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}+M_{12}(x,t)\frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}\right]dt=\tilde{S}_1(r) \tag{1.23}$$

$$-\frac{\gamma\psi_1^*(r)}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_2^*(s)ds}{(s-r)\sqrt{1-s^2}}+b\int_{-1}^{1}\left[M_{21}(x,t)\frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}+M_{22}(x,t)\frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}\right]dt=\tilde{S}_2(r) \tag{1.24}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}dt=0,\ \int_{-1}^{1}\frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}dt=0 \tag{1.25}$$

де $\psi_1^*(s)=f_1^*(bs)$, $\psi_2^*(s)=f_2^*(bs)$, $\tilde{S}_1(r)=-\dfrac{S_1(br)}{2\mu k_1}$, $\tilde{S}_2(r)=-\dfrac{S_2(br)+p_0}{2\mu k_1}$

Розглядаємо рівняння (1.23), (1.24) у вузлах

$$r_i=cos\left(\frac{\pi i}{N}\right),\ i=1,...,N-1,$$

і застосовуємо для обчислення інтегралів квадратурну формулу Гауса-Чебишева:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi_m^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds=\sum_{k=1}^{N}\frac{\pi}{N}\psi_m^*(s_k) \tag{1.26}$$

де $s_k=cos\left(\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right),\ k=1,...,N$.

Приходимо до системи:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_1^*(s_k)}{s_k-r_i}+\gamma\frac{\psi_2^*(r_i)}{\sqrt{1-r_i^2}}+\frac{b\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big[M_{11}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)+M_{12}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\Big]=\tilde{S}_1(r_i),$$

$$-\gamma\frac{\psi_1^*(r_i)}{\sqrt{1-r_i^2}}+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_2^*(s_k)}{s_k-r_i}+\frac{b\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big[M_{21}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)+M_{22}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\Big]=\tilde{S}_2(r_i). \tag{1.27}$$

де $x_i=br_i$, $t_k=bs_k$, $i=1,...,N-1$.

Оскільки вузли r_k знаходяться між вузлами s_k і s_{k+1}, то знаходимо $\psi_m^*(r_k)$ через $\psi_m^*(s_k)$ і $\psi_m^*(s_{k+1})$ за допомогою лінійної інтерполяції:

$$\psi_m^*(r_k)=\frac{(r_k-s_{k+1})}{s_k-s_{k+1}}\psi_m^*(s_k)+\frac{(r_k-s_k)}{s_{k+1}-s_k}\psi_m^*(s_{k+1})\ \ m=1,2. \tag{1.28}$$

Підставляючи (1.28) в (1.27), одержуємо

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_1^*(s_k)}{s_k-r_i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma}{\sqrt{1-r_k^2}}\left[\delta_{i,k}\frac{(r_k-s_{k+1})}{s_k-s_{k+1}}\psi_2^*(s_k)+\delta_{i,k+1}\frac{(r_k-s_k)}{s_{k+1}-s_k}\psi_2^*(s_{k+1})\right]+$$

$$+\frac{b\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big[M_{11}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)+M_{12}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\Big]=\tilde{S}_1(r_i) \tag{1.29}$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma}{\sqrt{1-r_k^2}}\left[\delta_{i,k}\frac{(r_k-s_{k+1})}{s_k-s_{k+1}}\psi_1^*(s_k)+\delta_{i,k+1}\frac{(r_k-s_k)}{s_{k+1}-s_k}\psi_1^*(s_{k+1})\right]+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_2^*(s_k)}{s_k-r_i}+$$

$$+\frac{b\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big[M_{21}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)+M_{22}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\Big]=\tilde{S}_2(r_i) \tag{1.30}$$

де $\delta_{i,k}$ – символи Кронекера, $i=1,...,N-1$.

Застосовуючи квадратурну формулу (1.26) до рівнянь (1.25), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{N}\psi_1^*(s_k)=0,\ \sum_{k=1}^{N}\psi_2^*(s_k)=0. \tag{1.31}$$

Рівняння (1.29)-(1.31) являють собою систему $2N$ лінійних алгебраїчних рівнянь із $2N$ невідомими $\psi_1^*(s_k)$ і $\psi_1^*(s_k)$ $(k=1,2...,N)$.

Після розв'язку системи отримуємо:

$$f_m(bs_k)=\frac{f_m^*(bs_k)}{b\sqrt{1-s_k^2}},\ m=1,2;\quad k=1,...,N,$$

а далі на основі (1.12) знаходяться похідні від переміщень верхнього берега тріщини, а за формулами

$$u(x,0)=\int_{-b}^{x}\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}dx,\ v(x,0)=\int_{-b}^{x}\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}dx \tag{1.32}$$

визначаються самі переміщення. Напруження ж на продовженнях тріщини знаходяться за формулами (1.17), (1.18).

Згідно з [80] швидкість звільнення енергії G при розвитку тріщини може бути обчислена за формулою:

$$G=\frac{\pi b\mu}{\kappa+1}\hat{K}^2 \tag{1.33}$$

де $\hat{K}=\sqrt{\left[f_1^*(b)\right]^2+\left[f_2^*(b)\right]^2}$.

1.4 Аналіз отриманих результатів та їх інтерпретація

Чисельна ілюстрація одержаного розв'язку проведена для мікротріщини довжиною 2 *мкм* при товщинах накладки в діапазоні $0{,}6$ *мкм* до 10 *мкм*. Крім того вважалось, що $\nu=0{,}3$, $E=2{,}6\cdot10^{-2}$ *Н / мкм*^{2}, $p_0=10^{-10}$ *Н / мкм*^{2}. Зосередженна сила P вибиралась в діапазоні від 0 до $10^{-10}H$ при значеннях відстані $2a$ між точками прикладення сил в діапазоні від 0 до 2 *мкм*.

На рис. 1.2 наведено розкриття тріщини $u_2(x_i,0)$ при $a=0{,}5$ *мкм*, $P=0$.

Крива I відповідає товщині накладки $h = 0,6$ *мкм*, II – $h = 0,7$ *мкм*, III – $h = 0,8$ *мкм*, IV – $h = 0,9$ *мкм*, V – $h = 1$ *мкм*, VI – $h = 2$ *мкм*, VII – $h = 5$ *мкм*, VIII – $h = 10$ *мкм*.

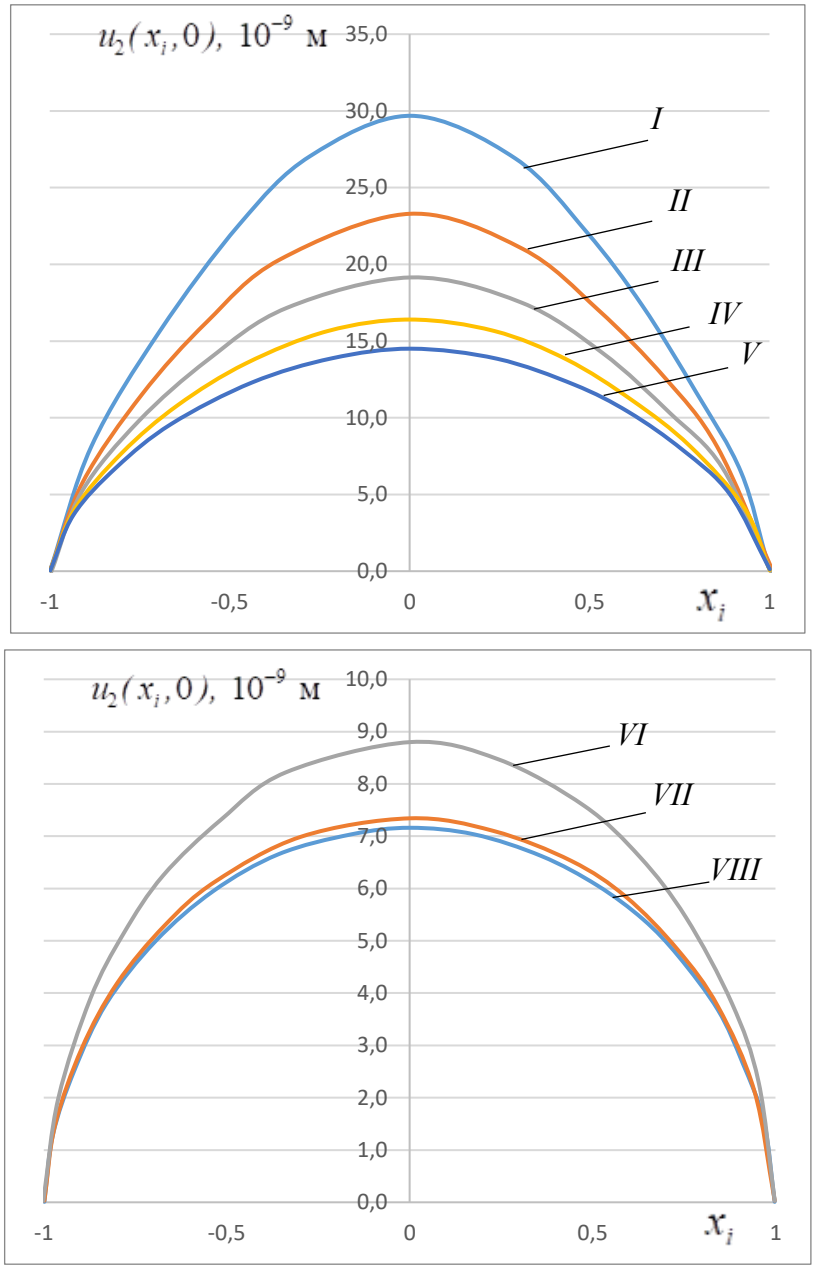
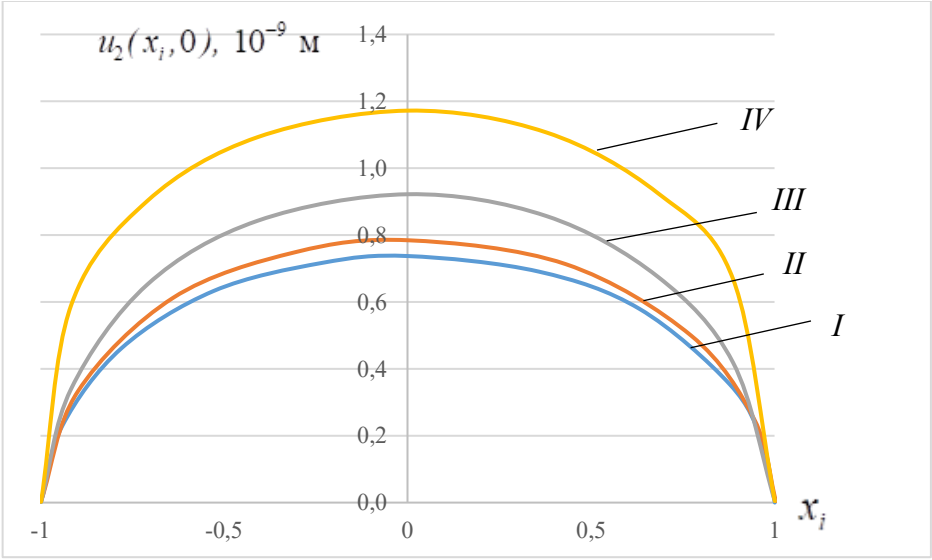


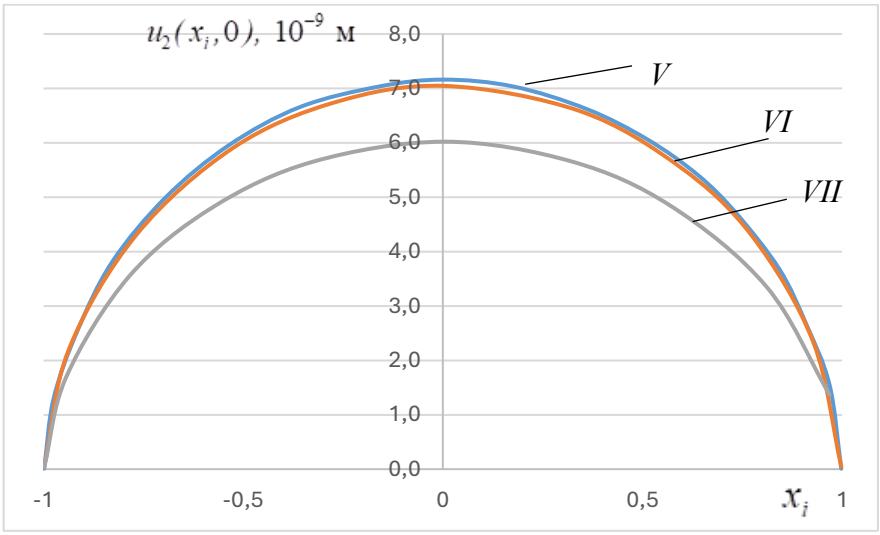
Рис. 1.2 Розкриття тріщини при різній товщині накладки

Зазначимо, що для товщини накладки більшої 5 *мкм* результати розкриття тріщини фактично не відрізняються від відповідних результатів для півплощини, а для товщини меншої $0,6$ *мкм* розкриття тріщини стають близькими до можливої границі використання лінійної теорії пружності.

Рис. 1.3 ілюструє зміну розкриття тріщини при зміні значень зосередженої сили P та зміні точки прикладання цієї сили. Криві I – IV побудовані для значень товщини накладки $h = 10$ *мкм*, $P = 1 \cdot 10^{-10}$ Н, а криві V – VII для $h = 10$ *мкм*, $a = 0{,}5$ *мкм*.



а



б

Рис. 1.3 Розкриття тріщини при:

а – різному положенні точки прикладання,

б – різних значення зосередженої сили P

Крива I побудована для $a = 0$, II – $a = 0{,}5$ *мкм*, III – $a = 1$ *мкм*, IV – $a = 2$ *мкм*. Крива V – для $P = 0$ Н, VI – $P = 0{,}1 \cdot 10^{-10}$ Н, VII – $P = 1 \cdot 10^{-10}$ Н.

З рис.1.3 видно, що збільшення значення зосередженої сили приводить до значного зменшення розкриття тріщини. Її подальше збільшення призводить до закриття тріщини. Зміна положення прикладання зосередженої сили від центру тріщини до її краю призводить до зміни значення розкриття. Максимальне зменшення розкриття тріщини спостерігається при прикладанні зосередженої сили по прямій, що проходить через центр тріщини, тоді як при віддалені точки прикладання за межі тріщини вплив зосередженої сили на розкриття тріщини стає незначним.

1.5 Розрахунок за допомогою методу скінчених елементів та порівняння результатів

Для випадку тонкої накладки скінченної довжини, що контактує з пружною основою скінченних розмірів (рис. 1.4) аналіз проведено також за допомогою методу скінчених елементів (МСЕ). Розглядалась мікротріщина довжиною $a = 2\ мкм$ при товщинах накладки в діапазоні $l = 0,6 - 10\ мкм$. Крім того вибирались $L = 40\ мкм$, $H = 60\ мкм$, $h = 10\ мкм$, $\nu = 0,3$, $E = 2,6 \cdot 10^{-2}\ H / мкм^2$, $p_0 = 10^{-10}\ H / мкм^2$.

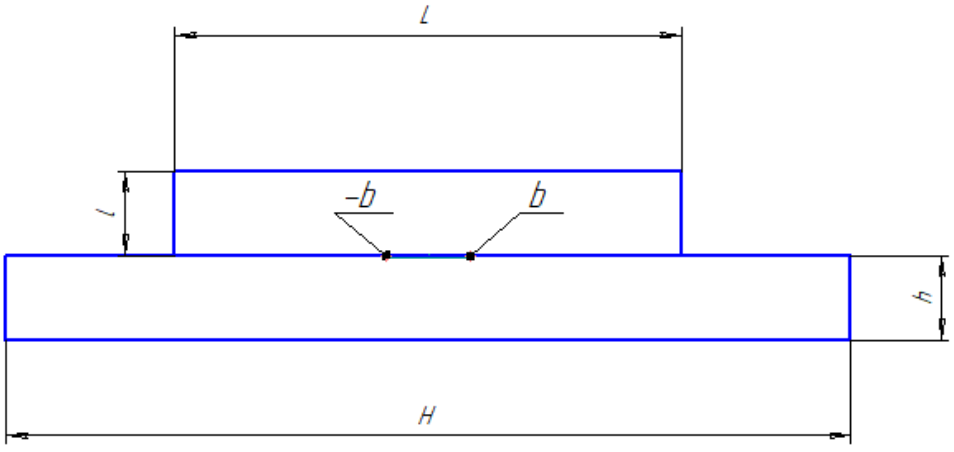


Рис. 1.4 Схема тонкої накладки для аналізу МСЕ

При моделюванні методом скінчених елементів проводилось ущільнювання сітки скінченних елементів в деякому околі тріщини (рис. 1.5). Ступінь ущільнення, а також розмір елементів варіювався в залежності від товщини накладки.

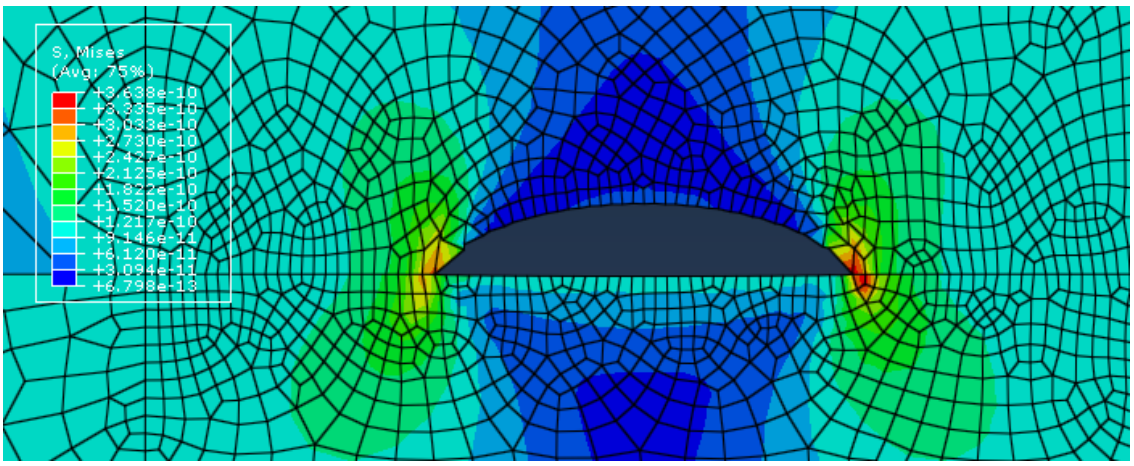


Рис.1.5 Приклад сітки з розподілом напружень Мізеса при $h = 5$ *мкм* ($a = 0{,}5$ *мкм*, $P = 0$)

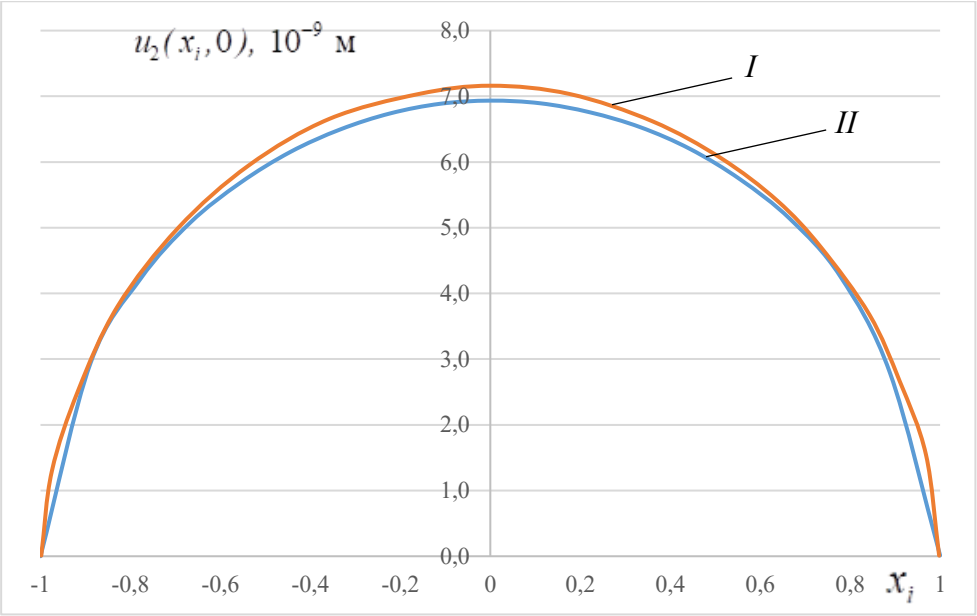
Отримані розподіли напружень, розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії для різних механічних характеристик складових біматеріалу, їх різних геометричних характеристик і різних навантажень.

Для випадку, коли жорсткість основи набагато більша жорсткості накладки, а її довжина набагато більша довжини тріщини проведено порівняння аналітичних і чисельних результатів (табл.1.1, рис.1.6).

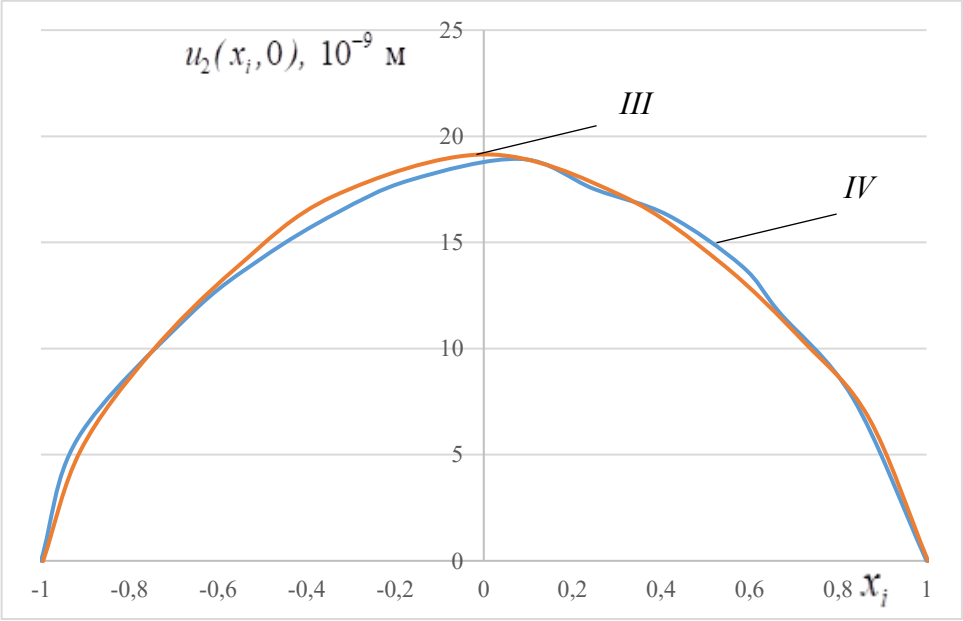
Таблиця 1.1

Товщина накладки h, мкм	ШЗЕ·10^{-19} [Н·м] (аналітичний розрахунок),	ШЗЕ·10^{-19} [Н·м] (розрахунок МСЕ),
10	5,385	5,346
5	5,675	5,725
2	7,775	7,747
1	15,917	15,995
0,9	18,663	18,576
0,8	22,663	22,588
0,7	28,831	28,781
0,6	39,099	39,044

На рис. 1.6 наведено розкриття тріщини. При цьому криві I, III відповідають аналітичному методу, тоді як II, IV – методу скінченних елементів.



а



б

Рис.1.6 Порівняльний аналіз розкриття тріщини при:

а - $h = 10$ *мкм* , б - $h = 0{,}8$ *мкм*

Наведені графіки та таблиці показують хороше узгодження результатів, отриманих аналітичним методом та МСЕ. Аналітичним та чисельним методами проаналізована також зміна форми розкриття тріщини зі зміною довжини накладки та її товщини, а також варіації швидкості звільнення енергії в залежності від зміни товщини накладки. Виявлено суттєвий ріст останнього фактору при зменшенні її товщини.

1.5 Висновки до першого розділу

Розглянуто задачу плоскої деформації відкритої мікротріщини, розташованої вздовж жорстко закріпленого краю тонкої пружної накладки скінченої товщини. Для її розв'язання побудовано аналітичний метод, який базується на застосуванні інтегральних перетворень Фур'є, зведенні задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь та їх чисельному розв'язанні за допомогою квадратур Гауса-Чебишева. Паралельно побудовано чисельну модель методом скінченних елементів для випадку накладки скінченої довжини.

В результаті отримано розв'язок задачі, який дозволяє визначати переміщення, напруження, розкриття тріщини та швидкість звільнення енергії в широкому діапазоні геометричних і силових параметрів. Проілюстровано суттєвий вплив товщини накладки на поведінку мікротріщини. Зокрема, отримано, що при $h \geq 5$ *мкм* результати практично співпадають з розв'язком для півплощини, тоді як при зменшенні товщини нижче 1 *мкм* спостерігається різке зростання розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії.

Отримано також, що збільшення зосередженої сили призводить до суттєвого зменшення розкриття тріщини аж до її повного закриття, а положення точки прикладання сили значно впливає на характер деформування. Показано добре узгодження аналітичних і чисельних результатів, що підтверджує надійність розробленої методики.

РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОЇ ПОЛОСИ І НАКЛАДКИ З МІКРОТРІЩИНОЮ НА МЕЖІ ЇХ З'ЄДНАННЯ

2.1 Постановка проблеми та застосування інтегральних перетворень Фур'є

Розглянемо плоску задачу для тріщини $|x| \le b$, яка розташована між двома ізотропними, лінійно пружними, нескінченими шарами товщин h_1, h_2, нижній з яких жорстко закріплений (при $y = -h_2$). Тріщина вважається відкритою рівномірним внутрішнім тиском p_0 на її береги (рис. 2.1).

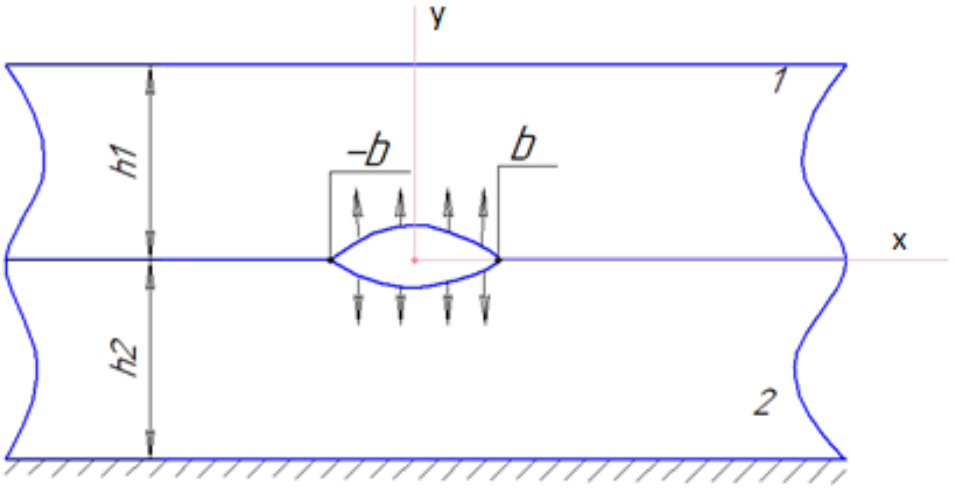


Рис. 2.1 Тріщина між тонкою полосою і накладкою

Для розв'язку цієї задачі розглянемо крайову задачу, яка описується системою диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних

$$\mu_i \, \Delta^2 u^{(i)}(x,y) + \frac{2\mu_i}{\kappa_i - 1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^{(i)}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v^{(i)}(x,y)}{\partial y} \right) = 0, \qquad (2.1)$$

$$\mu_i \, \Delta^2 v^{(i)}(x,y) + \frac{2\mu_i}{\kappa_i - 1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^{(i)}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v^{(i)}(x,y)}{\partial y} \right) = 0. \qquad (2.2)$$

де $(i = 1,\ 2)$.

з крайовими умовами, які завдяки симетрії можна записати у вигляді:

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, h_1) = 0, \ 0 \le x \le \infty, \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,h_1)=\frac{P}{2}\delta(x-a),\ 0\le x\le\infty, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial v^{(2)}(x,-h_2)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial u^{(2)}(x,-h_2)}{\partial x}=0,\ 0\le x\le\infty, \tag{2.5}$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)=\sigma_{yy}^{(2)}(x,0),\ 0\le x\le\infty, \tag{2.6}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)=0,\ 0\le x<b, \tag{2.7}$$

де $\kappa=\begin{cases}3-4\nu-\text{для плоскої деформації}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu}-\text{для плоского напруженого стану}\end{cases}$,

μ і ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона, відповідно.

Застосовуючи до рівнянь (2.1) та (2.2) інтегральні перетворення Фур'є:

$$\bar{u}(\alpha,y)=\int_0^\infty u(x,y)sin(\alpha x)dx,\ \bar{v}(\alpha,y)=\int_0^\infty v(x,y)cos(\alpha x)dx,$$

приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь. Знайшовши загальний розв'язок цієї системи і застосувавши до нього обернене перетворення Фур'є

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{u}(\alpha,y)sin(\alpha x)d\alpha,\ v(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{v}(\alpha,y)cos(\alpha x)d\alpha,$$

отримуємо

$$u^{(1)}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[(A_1+B_1y)e^{-\alpha y}+(C_1+D_1y)e^{\alpha y}\right]sin(\alpha x)d\alpha, \tag{2.8}$$

$$v^{(1)}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(A_1+\left(\frac{k_1}{\alpha}+y\right)B_1\right)e^{-\alpha y}+\left(-C_1+\left(\frac{k_1}{\alpha}-y\right)D_1\right)e^{\alpha y}\right]cos(\alpha x)d\alpha, \tag{2.9}$$

$$u^{(2)}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[(A_2+B_2y)e^{-\alpha y}+(C_2+D_2y)e^{\alpha y}\right]sin(\alpha x)d\alpha, \tag{2.10}$$

$$v^{(2)}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(A_2+\left(\frac{k_2}{\alpha}+y\right)B_2\right)e^{-\alpha y}+\left(-C_2+\left(\frac{k_2}{\alpha}-y\right)D_2\right)e^{\alpha y}\right]cos(\alpha x)d\alpha. \tag{2.11}$$

де $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2$ невідомі константи.

Знаходячи напруження для кожної полоси по формулам закону Гука для плоскої задачі, на основі рівнянь і (2.8)-(2.11), отримуємо

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,y)=\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[-\alpha\left(A_1+B_1y\right)-B_1\frac{\kappa_1-1}{2}\right]e^{-\alpha y}+\right.$$
$$\left.+\left[\alpha\left(C_1+D_1y\right)-D_1\frac{\kappa_1-1}{2}\right]e^{\alpha y}\right\}\sin\left(\alpha x\right)d\alpha=0,$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x,y)=\frac{4\mu_2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[-\alpha\left(A_2+B_2y\right)-B_2\frac{\kappa_2-1}{2}\right]e^{-\alpha y}+\right.$$
$$\left.+\left[\alpha\left(C_2+D_2y\right)-D_2\frac{\kappa_2-1}{2}\right]e^{\alpha y}\right\}\sin\left(\alpha x\right)d\alpha=0,\qquad(2.12)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,y)=\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[-\alpha\left(A_1+B_1y\right)-B_1\frac{1+\kappa_1}{2}\right]e^{-\alpha y}+\right.$$
$$\left.+\left[-\alpha\left(C_1+D_1y\right)+D_1\frac{1+\kappa_1}{2}\right]e^{\alpha y}\right\}\cos\left(\alpha x\right)d\alpha=0,$$

$$\sigma_{yy}^{(2)}(x,y)=\frac{4\mu_2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[-\alpha\left(A_2+B_2y\right)-B_2\frac{1+\kappa_2}{2}\right]e^{-\alpha y}+\right.$$
$$\left.+\left[-\alpha\left(C_2+D_2y\right)+D_2\frac{1+\kappa_2}{2}\right]e^{\alpha y}\right\}\cos\left(\alpha x\right)d\alpha=0.\qquad(2.13)$$

2.2 Формулювання та аналіз системи сингулярних інтегральних рівнянь

Введемо невідомі функції

$$f_1(x)=\frac{\partial u^{(1)}(x,0)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(2)}(x,0)}{\partial x},$$

$$f_2(x)=\frac{\partial v^{(1)}(x,0)}{\partial x}-\frac{\partial v^{(2)}(x,0)}{\partial x}\ \text{на}\ 0\le x\le b.\qquad(2.14)$$

Тоді, задовольняючи граничні умови (2.4)-(2.7) та рівняння (2.14), використовуючи (2.8)-(2.13) та застосовуючи до одержаних рівнянь обернені перетворення Фур'є, приходимо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2$:

$$-\alpha e^{-\alpha h_1}A_1+\left(-\alpha h_1-\frac{\kappa_1-1}{2}\right)e^{-\alpha h_1}B_1+\alpha e^{\alpha h_1}C_1+\left(\alpha h_1-\frac{\kappa_1-1}{2}\right)e^{\alpha h_1}D_1=0,$$

$$-\alpha e^{-\alpha h_1}A_1+\left(-\alpha h_1-\frac{\kappa_1+1}{2}\right)e^{-\alpha h_1}B_1-\alpha e^{\alpha h_1}C_1+\left(-\alpha h_1+\frac{\kappa_1+1}{2}\right)e^{\alpha h_1}D_1=\frac{P}{4\mu_1}cos(\alpha a),$$

$$e^{\alpha h_2}A_2-h_2e^{\alpha h_2}B_2+e^{-\alpha h_2}C_2-h_2e^{-\alpha h_2}D_2=0,$$

$$e^{\alpha h_2}A_2+\left(\frac{\kappa_2}{\alpha}-h_2\right)e^{\alpha h_2}B_2-e^{-\alpha h_2}C_2+\left(\frac{\kappa_2}{\alpha}-h_2\right)e^{-\alpha h_2}D_2=0,$$

$$-\alpha KA_1-K\frac{\kappa_1-1}{2}B_1+\alpha KC_1-\frac{\kappa_1-1}{2}KD_1+\alpha A_2+\frac{\kappa_2-1}{2}B_2-\alpha C_2+\frac{\kappa_2-1}{2}D_2=0,$$

$$A_1+C_1-A_2-C_2=\frac{1}{\alpha}\overline{f}_1(\alpha),$$

$$A_1+\frac{\kappa_1}{\alpha}B_1-C_1+\frac{\kappa_1}{\alpha}D_1-A_2-\frac{\kappa_2}{\alpha}B_2+C_2-\frac{\kappa_2}{\alpha}D_2=\frac{1}{\alpha}\overline{f}_2(\alpha),$$

де $K=\frac{\mu_1}{\mu_2}$, $\overline{f}_2(\alpha)=\int_0^\infty f_2(x)sin(\alpha x)dx$, $\overline{f}_1(\alpha)=\int_0^\infty f_1(x)cos(\alpha x)dx$.

Розв’язок цієї системи знайдений з використанням системи комп’ютерної алгебри Wolfram Mathematica 14.2 і на його основі знайдені вирази для напружень для верхньої тонкої накладки у наступній формі:

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^\infty\left[H_{11}(\alpha)\overline{f}_1(\alpha)+H_{12}(\alpha)\overline{f}_2(\alpha)\right]sin(\alpha x)d\alpha, \qquad (2.15)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)=\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^\infty\left[H_{21}(\alpha)\overline{f}_1(\alpha)+H_{22}(\alpha)\overline{f}_2(\alpha)\right]cos(\alpha x)d\alpha, \qquad (2.16)$$

де функції $H_{ij}(\alpha)$ наведені в додатку Б.

Знаходячи $H_{ij}^\infty=H_{ij}(\alpha)$ при $\alpha\to\infty$:

$$H_{11}^\infty=H_{22}^\infty=-\frac{1+K+\kappa_1+\kappa_2K}{\Delta},\ H_{12}^\infty=H_{21}^\infty=\frac{1-K-\kappa_1+\kappa_2K}{\Delta},$$

$$\Delta=2(K+\kappa_1)(1+\kappa_2K),$$

запишемо вирази (2.15), (2.16) у вигляді:

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^\infty\left[\tilde{H}_{11}(\alpha)\bar{f}_1(\alpha)+\tilde{H}_{12}(\alpha)\bar{f}_2(\alpha)\right]sin(\alpha x)d\alpha+$$

$$+\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^\infty\left[H_{11}^\infty\,\bar{f}_1(\alpha)+H_{11}^\infty\,\bar{f}_2(\alpha)\right]sin(\alpha x)d\alpha\,, \qquad (2.17)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)=\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^\infty\left[\tilde{H}_{21}(\alpha)\bar{f}_1(\alpha)+\tilde{H}_{22}(\alpha)\bar{f}_2(\alpha)\right]cos(\alpha x)d\alpha+$$

$$+\frac{4\mu_1}{\pi}\int_0^\infty\left[H_{21}^\infty\,\bar{f}_1(\alpha)+H_{22}^\infty\,\bar{f}_2(\alpha)\right]cos(\alpha x)d\alpha\,, \qquad (2.18)$$

де $\tilde{H}_{ij}(\alpha)=H_{ij}(\alpha)-H_{ij}^\infty$.

Враховуючи наступні інтегральні формули

$$\int_0^\infty e^{-\eta\alpha}\,sin\alpha(x\mp y)d\alpha=\frac{1}{x\mp y}\ \text{при}\ \eta\to 0\,,$$

$$\int_0^\infty f_i(t)\int_0^\infty sin(\alpha t)sin(\alpha x)d\alpha dt=\frac{\pi}{2}f_i(x)\ \ (i=1,2).$$

вирази для напружень (2.17), (2.18) з урахуванням симетрії відносно осі y можна представити у вигляді:

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\frac{2\mu_1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_1(t)\int_0^\infty\tilde{H}_{11}(\alpha)\left[-sin\alpha(t-x)\right]d\alpha dt+$$

$$+\frac{2\mu_1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_2(t)\int_0^\infty\tilde{H}_{12}(\alpha)cos\alpha(t-x)d\alpha dt-2\mu_1\left[H_{11}^\infty\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1(t)}{t-x}dt-H_{12}^\infty f_2(x)\right], \qquad (2.19)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)=\frac{2\mu_1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_1(t)\int_0^\infty\tilde{H}_{21}(\alpha)cos\alpha(t-x)d\alpha dt-2\mu_1\left[H_{21}^\infty f_1(x)+H_{22}^\infty\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(t)}{t-x}dt\right]+$$

$$+\frac{2\mu_1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_2(t)\int_0^\infty\tilde{H}_{22}(\alpha)\left[sin\alpha(t-x)\right]d\alpha dt\,. \qquad (2.20)$$

Вводячи позначення

$$M_{11}(x,t)=\int_0^\infty\tilde{H}_{11}(\alpha)sin\alpha(t-x)d\alpha\,,\ M_{12}(x,t)=\int_0^\infty\tilde{H}_{12}(\alpha)cos\alpha(t-x)d\alpha\,,$$

$$M_{21}(x,t)=\int_0^{\infty}\tilde{H}_{21}(\alpha)\cos\alpha(t-x)d\alpha,\ M_{22}(x,t)=\int_0^{\infty}\tilde{H}_{22}(\alpha)\sin\alpha(t-x)d\alpha,$$

формули (2.19), (2.20) можна записати у вигляді:

$$\frac{\tau_{xy}^{(1)}(x,0)}{2\mu_1}=-\frac{H_{11}^{\infty}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1(t)}{t-x}dt+H_{12}^{\infty}f_2(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_1(t)M_{11}(x,t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_2(t)M_{12}(x,t)dt, \qquad (2.21)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)}{2\mu_1}=-H_{21}^{\infty}f_1(x)-\frac{H_{22}^{\infty}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_1(t)M_{21}(x,t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_2(t)M_{22}(x,t)dt. \qquad (2.22)$$

Задовольняючи тепер граничним умовам (2.7), приходимо до наступної системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$-\frac{H_{11}^{\infty}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1(t)}{t-x}dt+H_{12}^{\infty}f_2(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_1(t)M_{11}(x,t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_2(t)M_{12}(x,t)dt=0, \qquad (2.23)$$

$$-H_{21}^{\infty}f_1(x)-\frac{H_{22}^{\infty}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_1(t)M_{21}(x,t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_2(t)M_{22}(x,t)dt=\frac{p_0}{2\mu_1}. \qquad (2.24)$$

Додаткові умови до цієї системи наступні:

$$\int_{-b}^{b}f_1(t)dt=0,\ \int_{-b}^{b}f_2(t)dt=0. \qquad (2.25)$$

2.3 Алгоритм чисельного аналізу взаємодії полоси та накладки

Розв'язок системи (2.23), (2.24) має осцилюючу сингулярність біля вершин тріщини, але згідно [124] для знаходження глобальних параметрів руйнування і швидкості звільнення енергії (ШЗЕ) осциляцію можна не враховувати і розшукувати розв'язок цієї системи у формі:

$$f_i(t)=\frac{f_i^*(t)}{\sqrt{b^2-t^2}}\ \text{(i=1,2).} \qquad (2.26)$$

Підставляючи (22) в (19)-(21) і переходячи за допомогою заміни $x = br,\quad t = bs$ до проміжку [-1,1], одержуємо

$$-\frac{H_{11}^{\infty}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1^*(s)ds}{(s-r)\sqrt{1-s^2}}+\frac{H_{12}^{\infty}\psi_2^*(r)}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[M_{11}(x,t)\frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}-M_{12}(x,t)\frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}\right]dt=0, \qquad (2.27)$$

$$-\frac{H_{21}^{\infty}\psi_1^*(r)}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{H_{22}^{\infty}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_2^*(s)ds}{(s-r)\sqrt{1-s^2}}+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[M_{21}(x,t)\frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}+M_{22}(x,t)\frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}\right]dt=\frac{p_0}{2\mu_1}, \qquad (2.28)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}dt=0,\ \int_{-1}^{1}\frac{\psi_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}dt=0, \qquad (2.29)$$

де $\psi_1^*(s)=f_1^*(bs),\ \psi_2^*(s)=f_2^*(bs).$

Розглядаємо рівняння (23), (24) у вузлах

$$r_i=\cos\left(\frac{\pi i}{N}\right),\ i=1,\ldots,N-1$$

і застосовуємо для обчислення інтегралів квадратурну формулу Гауса-Чебишева:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi_m^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds=\sum_{k=1}^{N}\frac{\pi}{N}\psi_m^*(s_k), \qquad (2.30)$$

де $s_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right),\ k=1,\ldots,N.$

В результаті приходимо до системи:

$$-\frac{H_{11}^{\infty}}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_1^*(s_k)}{s_k-r_i}+H_{12}^{\infty}\frac{\psi_2^*(r_i)}{\sqrt{1-r_i^2}}-\frac{b}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[M_{11}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)-M_{12}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\right]=0,$$

$$-H_{21}^{\infty}\frac{\psi_1^*(r_i)}{\sqrt{1-r_i^2}}-\frac{H_{22}^{\infty}}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_2^*(s_k)}{s_k-r_i}+\frac{b}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[M_{21}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)+M_{22}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\right]=\frac{p_0}{2\mu_1}, \qquad (2.31)$$

де $x_i=br_i,\ t_k=bs_k,\ i=1,\ldots,N-1.$

Оскільки вузли r_k знаходяться між вузлами s_k і s_{k+1}, то знаходимо $\psi_m^*(r_k)$ через $\psi_m^*(s_k)$ і $\psi_m^*(s_{k+1})$ за допомогою лінійної інтерполяції:

$$\psi_m^*(r_k)=\frac{(r_k-s_{k+1})}{s_k-s_{k+1}}\psi_m^*(s_k)+\frac{(r_k-s_k)}{s_{k+1}-s_k}\psi_m^*(s_{k+1})\ \ m=1,2. \qquad (2.32)$$

Підставляючи (2.32) в (2.31), одержуємо

$$-\frac{H_{11}^{\infty}}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_1^*(s_k)}{s_k-r_i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{H_{12}^{\infty}}{\sqrt{1-r_k^2}}\left[\delta_{i,k}\frac{(r_k-s_{k+1})}{s_k-s_{k+1}}\psi_2^*(s_k)+\delta_{i,k+1}\frac{(r_k-s_k)}{s_{k+1}-s_k}\psi_2^*(s_{k+1})\right]-$$

$$-\frac{b}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[M_{11}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)+M_{12}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\right]=0, \qquad (2.33)$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{H_{21}^{\infty}}{\sqrt{1-r_k^2}}\left[\delta_{i,k}\frac{(r_k-s_{k+1})}{s_k-s_{k+1}}\psi_1^*(s_k)+\delta_{i,k+1}\frac{(r_k-s_k)}{s_{k+1}-s_k}\psi_1^*(s_{k+1})\right]-\frac{H_{22}^{\infty}}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_2^*(s_k)}{s_k-r_i}+$$

$$+\frac{b}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[M_{21}(x_i,t_k)\psi_1^*(s_k)+M_{22}(x_i,t_k)\psi_2^*(s_k)\right]=\frac{p_0}{2\mu_1}, \qquad (2.34)$$

де $\delta_{i,k}$ – символи Кронекера, $i=1,...,N-1$.

Застосовуючи квадратурну формулу (2.30) до рівнянь (2.29), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{N}\psi_1^*(s_k)=0,\ \sum_{k=1}^{N}\psi_2^*(s_k)=0. \qquad (2.35)$$

Рівняння (2.33)-(2.35) являють собою систему $2N$ лінійних алгебраїчних рівнянь із $2N$ невідомими $\psi_1^*(s_k)$ і $\psi_1^*(s_k)$ $(k=1,2...,N)$.

Після розв'язку системи отримуємо:

$$f_m(bs_k)=\frac{f_m^*(bs_k)}{b\sqrt{1-s_k^2}},\ m=1,2;\quad k=1,...,N,$$

а далі на основі (2.14) знаходяться похідні від стрибків переміщень верхнього і нижнього берегів тріщини $f_1(x)$ і $f_2(x)$, а за формулами

$$\langle u(x,0)\rangle=\int_{-b}^{x}f_1(x)dx,\ \langle v(x,0)\rangle=\int_{-b}^{x}f_2(x)dx, \qquad (2.36)$$

визначаються самі стрибки переміщень

$\langle u(x,0)\rangle=u^{(1)}(x,0)-u^{(2)}(x,0)$ і $\langle v(x,0)\rangle=v^{(1)}(x,0)-v^{(2)}(x,0)$.

Для знаходження напружень для $x\notin(-b,b)$ використовуємо формули (2.21) і (2.22). Але, враховуючи, що $f_1(x)=0$ для $x\notin(-b,b)$, вони приймають вигляд:

$$\frac{\tau_{xy}^{(1)}(x,0)}{2\mu_1}=-\frac{H_{11}^{\infty}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1(t)}{t-x}dt-\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_1(t)M_{11}(x,t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}f_2(t)M_{12}(x,t)dt, \qquad (2.37)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)}{2\mu_1} = -\frac{H_{22}^{\infty}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(t)}{t-x}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} f_1(t)M_{21}(x,t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} f_2(t)M_{22}(x,t)dt\,. \qquad (2.38)$$

для $x \notin (-b,b)$.

Застосовуючи для обчислення інтегралів у виразах (2.37), (2.38) квадратурну формулу Гауса-Чебишева і проводячи аналіз, аналогічний викладеному вище, приходимо до формул

$$\frac{\tau_{xy}^{(1)}(x,0)}{2\mu_1} \approx -\frac{H_{11}^{\infty}}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_1^*(s_k)}{s_k - r} - \frac{b}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[M_{11}(x,t_k)\psi_1^*(s_k) - M_{12}(x,t_k)\psi_2^*(s_k)\right], \qquad (2.39)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)}{2\mu_1} \approx -\frac{H_{22}^{\infty}}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_2^*(s_k)}{s_k - r} + \frac{b}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[M_{21}(x,t_k)\psi_1^*(s_k) + M_{22}(x,t_k)\psi_2^*(s_k)\right], \qquad (2.40)$$

де $x \notin (-b,b)$, $r = x/b$.

Згідно з [124] швидкість звільнення енергії G при розвитку тріщини може бути обчислена за формулою:

$$G = \frac{\pi b \mu_1}{\kappa_1 + 1}\hat{K}^2, \qquad (2.41)$$

де $\hat{K} = \sqrt{\left[f_1^*(b)\right]^2 + \left[f_2^*(b)\right]^2}$.

2.4 Результати розрахунків та їх аналіз

Чисельна ілюстрація одержаного розв'язку проведена для мікротріщини довжиною 2 мкм при товщинах двох нескінчених шарів в діапазоні від 0,5 мкм до 10 мкм. Крім того вважалось, що $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, модуль Юнга для кожного шару змінювався в межах від $2,2\cdot10^{-2}\,H/мкм^2$ до $22\cdot10^{-2}\,H/мкм^2$, а внутрішній тиск $p_0 = 10\cdot10^{-6}\,H/мкм^2$.

На рис. 2.2 наведено розкриття тріщини $\langle v(x,0)\rangle$ при значеннях модуля Юнга накладки $E_1 = 0,026\,H/мкм^2$ та полоси $E_2 = 0,022\,H/мкм^2$.

Крива I відповідає товщині накладки $h_1 = 0,9\ мкм$ і полоси $h_2 = 10\ мкм$, II – $h_1 = 2\ мкм,\ h_2 = 10\ мкм$, III – $h_1 = 10\ мкм,\ h_2 = 10\ мкм$, IV –

$h_1 = 10$ *мкм*, $h_2 = 0{,}5$ *мкм*, V – $h_1 = 10$ *мкм*, $h_2 = 2$ *мкм*, VI – $h_1 = 10$ *мкм*, $h_2 = 10$ *мкм*.

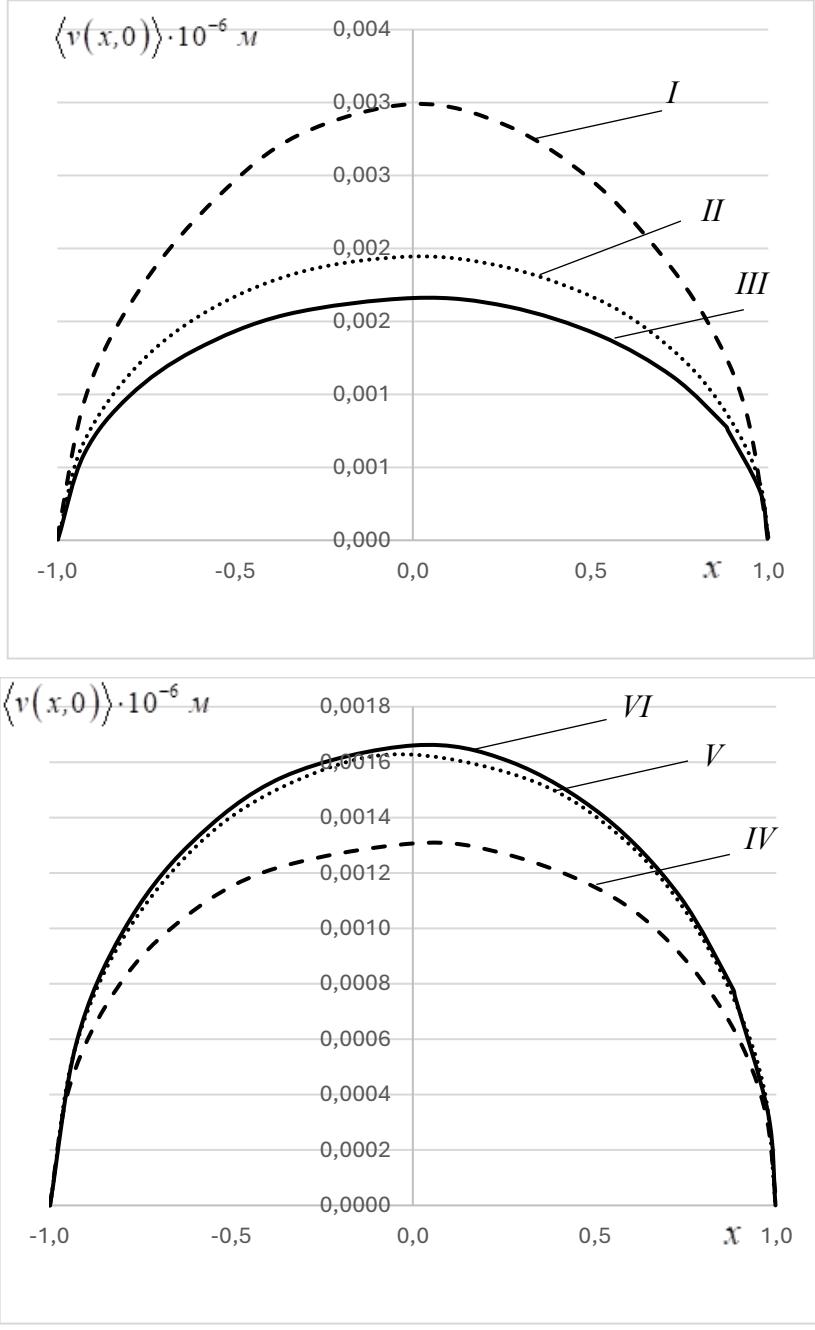


Рис 2.2 Розкриття тріщини при різній товщині полоси та накладки

Рис. 2.3 побудовано для тих же значень модуля Юнга, що і рис. 2.2. Він демонструє зміну значень напруження на продовженні тріщини при різних значеннях товщин полоси та накладки.

Графік I побудований для товщини накладки $h_1 = 0{,}5$ *мкм* та полоси $h_2 = 10$ *мкм*, II – $h_1 = 0{,}9$ *мкм*, $h_2 = 10$ *мкм*, III – $h_1 = 10$ *мкм*, $h_2 = 10$ *мкм*

IV – $h_1 = 10\ мкм,\ h_2 = 0,5\ мкм$, V – $h_1 = 10\ мкм,\ h_2 = 0,9\ мкм$, VI – $h_1 = 10\ мкм,\ h_2 = 10\ мкм$.

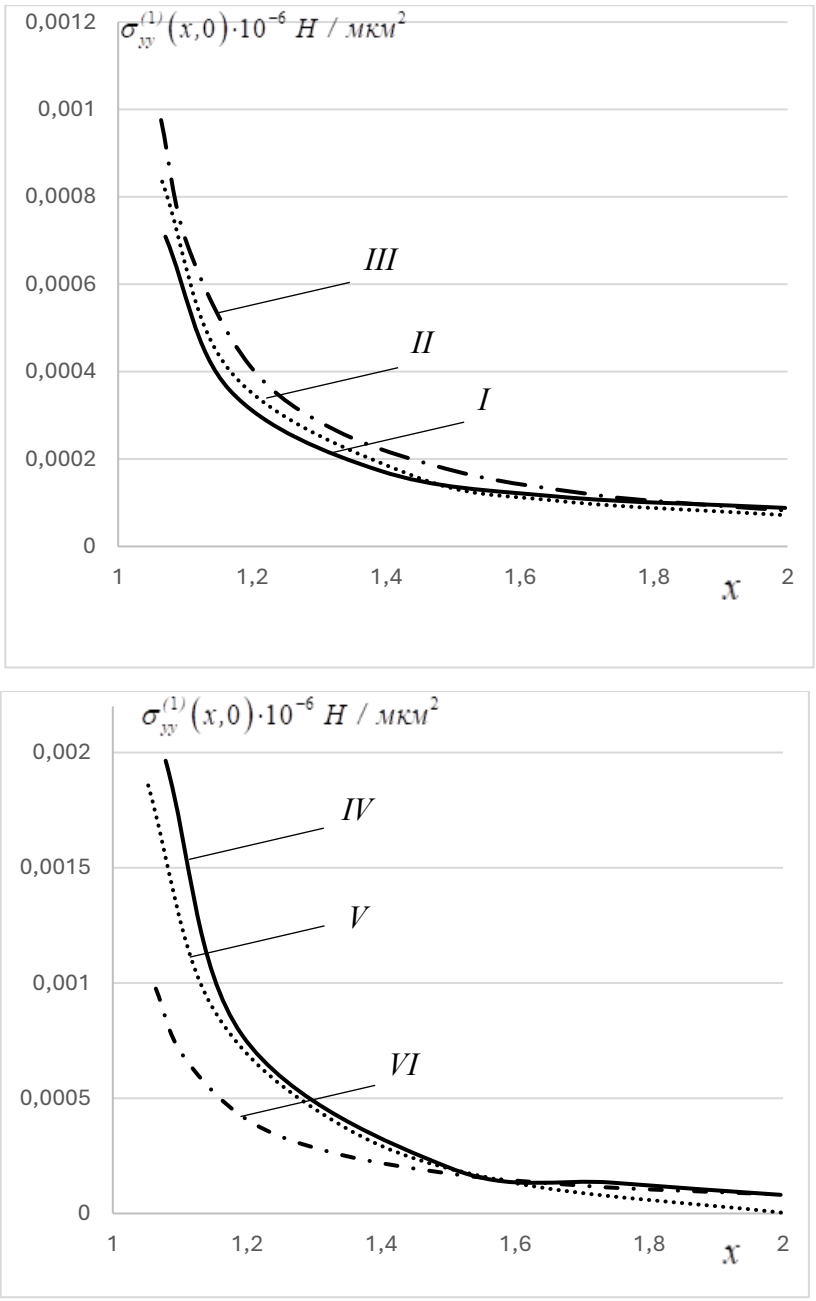


Рис. 2.3 Напруження на продовженні тріщини при різній товщині полоси та накладки

Зазначимо, що при зменшенні товщини тонкої накладки спостерігається значне зростання розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії (табл. 2.1), тоді як при зменшенні товщини тонкої полоси значна зміна спостерігається тільки для товщини меншої $0,5\ мкм$, що може вказувати на наближення

значень розкриття тріщини до можливої границі використання лінійної теорії пружності.

Таблиця 2.1

Товщина накладки h_1, мкм	Товщина полоси h_2, мкм	ШЗЕ·10^{-8} [Н·м] E_1=0,026 Н/мкм^2, E_2=0,022 Н/мкм^2	E_1, Н/мкм^2	E_2, Н/мкм^2	ШЗЕ·10^{-8} [Н·м] h_1=2 мкм, h_2=10 мкм
10	10	2,77	0,026	0,022	3,68
5		2,89	0,052		4,13
2		3,68	0,13		6,27
0,9		6,94	0,26		9,88
0,5		15,1			
10	10	2,77	0,026	0,022	3,68
	5	2,76		0,044	1,98
	2	2,66		0,11	1,16
	0,9	2,32		0,22	0,93
	0,5	1,92			

На рис. 2.4 представлені графіки розкриття тріщини $\langle v(x,0)\rangle$ при зміні модуля Юнга для полоси та накладки. Графіки побудовані для товщини накладки $h_1 = 2$ *мкм* та полоси $h_2 = 10$ *мкм*.

Криві побудовані при наступних значеннях модуля Юнга для полоси та накладки:

I – $E_1 = 0,026\ H/мкм^2,\ E_2 = 0,022\ H/мкм^2$,

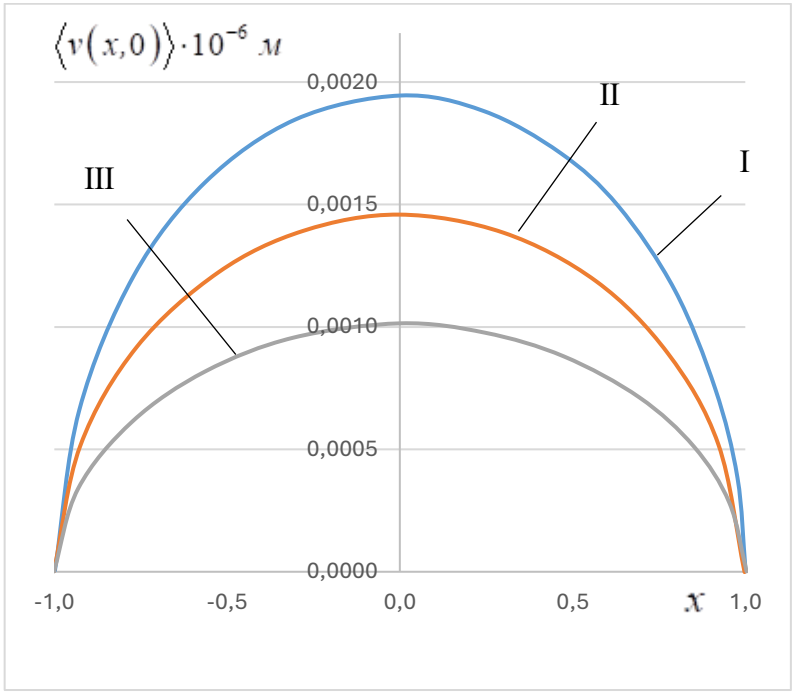
II – $E_1 = 0,052\ H/мкм^2,\ E_2 = 0,022\ H/мкм^2$,

III – $E_1 = 0,26\ H/мкм^2,\ E_2 = 0,022\ H/мкм^2$,

IV – $E_1 = 0,026\ H/мкм^2,\ E_2 = 0,022\ H/мкм^2$,

V – $E_1 = 0,026\ H/мкм^2,\ E_2 = 0,044\ H/мкм^2$,

VI – $E_1 = 0,026\ Н / мкм^2$, $E_2 = 0,22\ Н / мкм^2$.



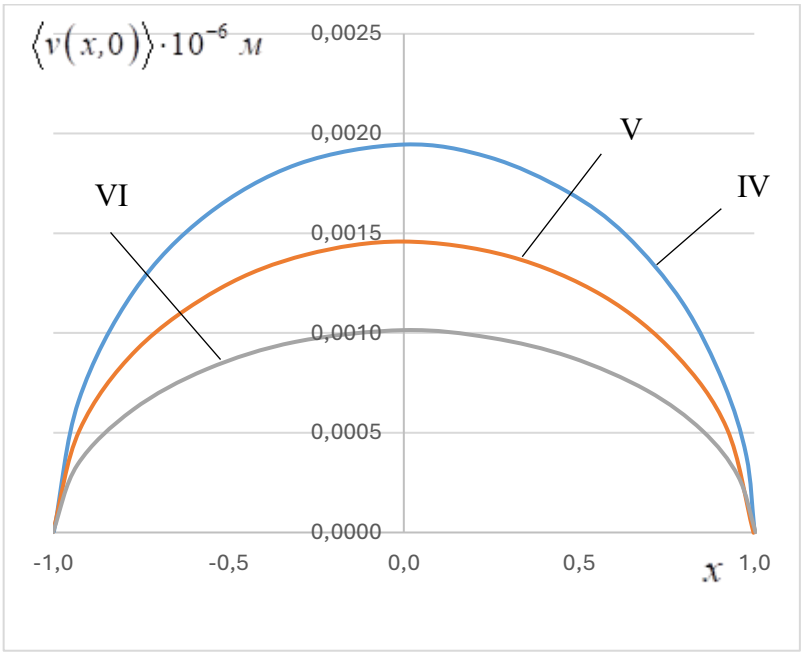


Рис 2.4 Розкриття тріщини при різних значеннях модуля Юнга

При збільшенні значень модуля Юнга спостерігається зменшення розкриття тріщини. Швидкість звільнення ж енергії на краю тріщини для верхньої полоси у цьому випадку значно зростає, тоді як у випадку збільшення модулю Юнга для нижньої полоси спостерігається значне зменшення швидкості звільнення енергії для накладки (табл.2.1).

Для випадку тонкої накладки скінченної довжини, що контактує з тонкою полосою скінченних розмірів (рис. 2.5) аналіз проведено за допомогою методу скінчених елементів (МСЕ). Розглядалась мікротріщина довжиною $b = 2$ мкм при товщинах накладки та тонкої полоси в діапазоні $0,5 - 10$ мкм. Крім того, вибирались $L = 50$ мкм, $l = 50$ мкм, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $E_1 = 2,6 \cdot 10^{-2} - 26 \cdot 10^{-2} H / мкм^2$, $E_2 = 2,2 \cdot 10^{-2} - 22 \cdot 10^{-2} H / мкм^2$, $p_0 = 10 \cdot 10^{-6} H / мкм^2$

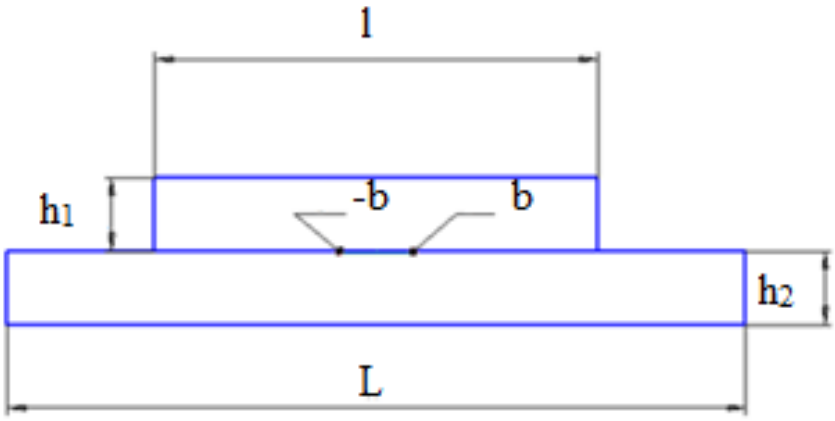


Рис.2.5 Схема тонкої накладки для аналізу МСЕ

При моделюванні МСЕ проводилось ущільнювання сітки скінченних елементів в деякому околі тріщини (рис. 2.6). Ступінь ущільнення, а також розмір елементів варіювався в залежності від товщини накладки.

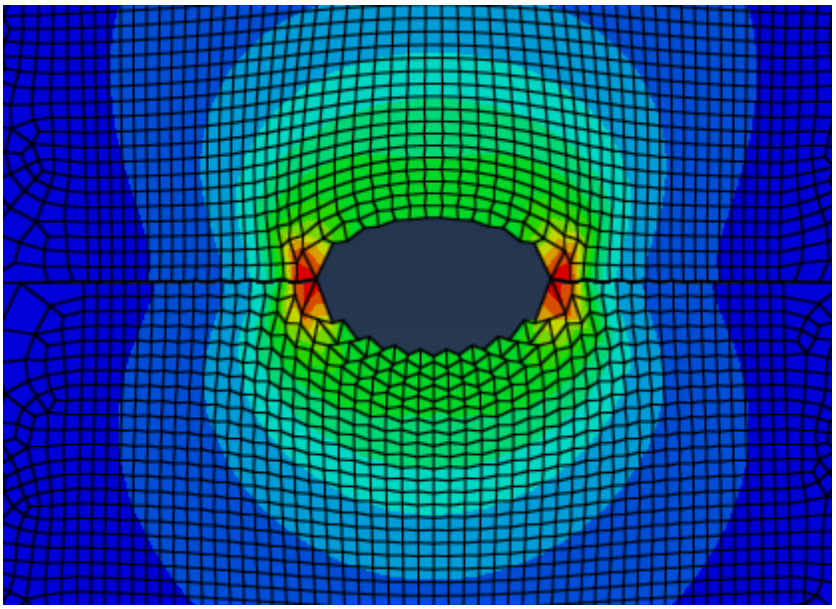
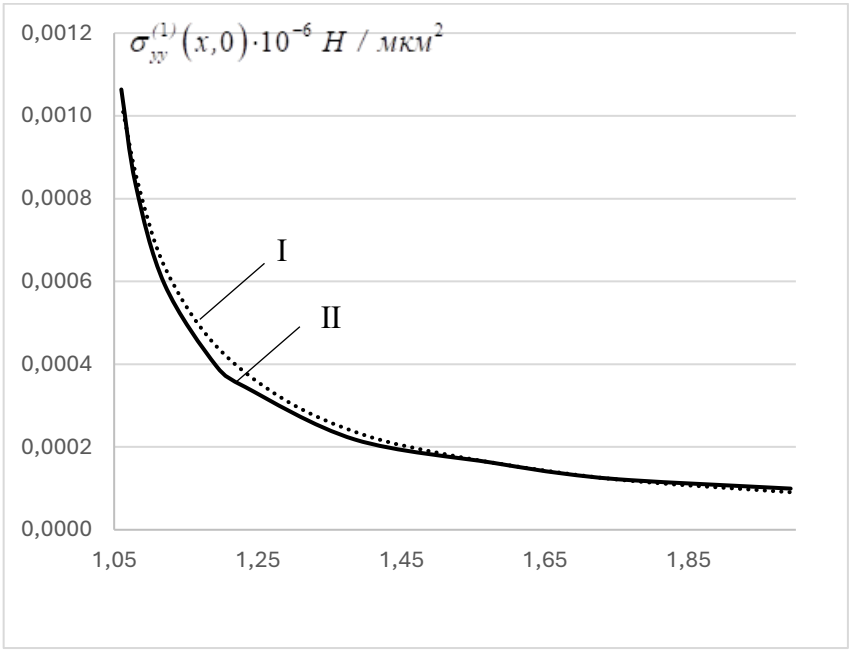
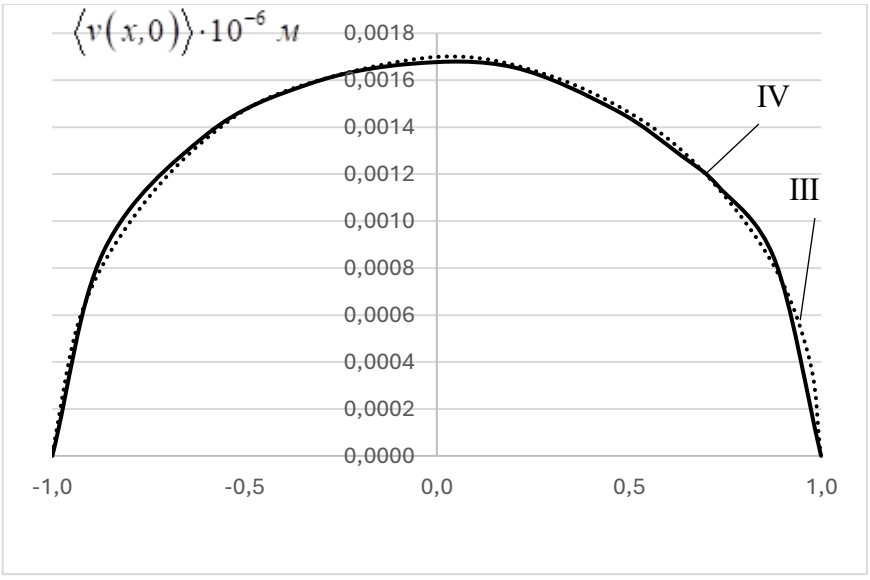


Рис.2.6 Приклад сітки з розподілом напружень Мізеса при $h_1 = 5$ *мкм*, $h_2 = 10$ *мкм* ($E_1 = 0,026$ $H / мкм^2$, $E_2 = 0,022$ $H / мкм^2$)

Отримані розподіли напружень, розкриття тріщини та швидкості звільнення енергії для різних значень характеристик тонкої накладки та полоси. При тих же параметрах, що і для рис. 2.6, тобто для випадку, коли товщина накладки в два рази менша за товщину полоси, а жорсткості приблизно рівні проведено порівняння аналітичних і чисельних результатів (рис.2.7). Криві I, III відповідають аналітичному методу, тоді як II, IV – методу скінченних елементів.



а



б

Рис 2.7 Порівняльний аналіз розкриття (а) та напруження на продовженні тріщини (б)

Наведені графіки демонструють хороше узгодження результатів, отриманих аналітичним методом та МСЕ. Аналітичним та чисельним методами проаналізована зміна форми розкриття тріщини зі зміною товщин накладки та полоси або зміною жорсткості матеріалу, а також варіації швидкості звільнення енергії в залежності від зміни товщини накладки та полоси. Виявлено суттєвий ріст останнього фактору при зменшенні товщини накладки.

2.5 Висновки до другого розділу

У даному розділі була розглянута задача плоскої деформації тріщини, розташованої між двома ізотропними, лінійно пружними нескінченними шарами, причому нижній шар жорстко закріплений. Тріщина була навантажена рівномірним внутрішнім тиском, і її розкриття та напружений стан були досліджені шляхом розв’язання відповідної крайової задачі. Методом інтегральних перетворень Фур'є була побудована система диференціальних рівнянь, яка дозволила отримати аналітичний вираз для напружень і переміщень у шарах.

Додатково з метою верифікації аналітичних результатів був проведений чисельний аналіз за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Знайдено, що результати, отримані аналітично та за допомогою МСЕ, узгоджуються з високою точністю.

Чисельні розрахунки показали значний вплив товщини тонкої накладки на розкриття тріщини та швидкість звільнення енергії, причому при зменшенні товщини накладки ці параметри зростають. Це дозволяє рекомендувати врахування даного ефекту у практичних задачах, пов’язаних із прогнозуванням тріщиноутворення в багатошарових матеріалах.

Деталізація результатів дослідження допоможе при розробці більш стійких до руйнування композитів, що особливо актуально для інженерних застосувань, де мікротріщини можуть стати причиною зниження надійності мікроелектронних пристроїв.

РОЗДІЛ 3. МІЖФАЗНА ТРІЩИНА МІЖ ДВОМА ІЗОТРОПНИМИ МАТЕРІАЛАМИ З УРАХУВАННЯМ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ

3.1 Поверхнева пружність в моделі Гуртина-Мердока

У моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока [59] поверхня пружного тіла розглядається як тонка пружна мембрана, яка ідеально з'єднана з основним матеріалом і має пружні константи, відмінні від основного матеріалу. Якщо поверхня тіла не є плоскою, то рівняння рівноваги такої «мембрани» мають вигляд:

$$\sigma^s_{\alpha\beta,\beta}\mathbf{e}_\alpha + \left[\sigma_{ij}n_j\mathbf{e}_i\right] = 0 \text{ – у тангенціальному напрямі,} \tag{3.1}$$

$$k_{\alpha\beta}\sigma^s_{\alpha\beta} = \left[\sigma_{ij}n_in_j\right] \text{ – у напрямку нормалі.} \tag{3.2}$$

де $\sigma^s_{\alpha\beta}$ – компоненти поверхневого тензора напружень, причому $\alpha,\beta = 1,3$; $\mathbf{e}_\alpha$ – базисні вектори; σ_{ij} – компоненти тензора напружень основного матеріалу; n_j – компоненти одиничної нормалі до поверхні; $k_{\alpha\beta}$ – компоненти тензора кривизни «мембрани»; $[f]$ – стрибок функції f при переході через поверхневий шар, кома перед нижнім індексом означає диференціювання по відповідній координаті. Тут і надалі всі фактори, що відносяться до поверхневих шарів позначаються верхнім індексом s (surface).

Компоненти поверхневого тензора напружень зв'язані з компонентами поверхневого тензора деформацій $\varepsilon^s_{\alpha\beta}$ формулами [59]:

$$\sigma^s_{\alpha\beta} = C^s_{\alpha\beta\omega\rho}\varepsilon^s_{\omega\rho} + \sigma_0\delta_{\alpha\beta} - 2\sigma_0\varepsilon^s_{\alpha\beta} + \sigma_0\varepsilon^s_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}, \tag{3.3}$$

де σ_0 – поверхневий натяг, який невід'ємний і не залежить від деформації; $\delta_{\alpha\beta}$ – символи Кронекера; $C^s_{\alpha\beta\omega\rho}$ – компоненти танзора пружних констант «мембрани».

Враховуючи, що в недеформованому стані береги тріщини плоскі і лежать в площині (x_1, x_3), $\mathbf{n} = (0,1,0)$, а похідні від напружень по x_3 дорівнюють 0, рівняння (3.1) для верхнього берега тріщини приймає вигляд:

$$\sigma^s_{11,1} + \left(\sigma^+_{12} - \sigma^-_{12}\right) = 0,\ \sigma^s_{13,1} + \left(\sigma^+_{23} - \sigma^-_{23}\right) = 0,$$

а рівняння (3.2) з урахуванням того, що $\kappa_{13} = \kappa_{33} = 0$ стає наступним:

$$\left(\sigma^+_{22} - \sigma^-_{22}\right) = \sigma^s_{11} u_{2,11}\,.$$

Враховуючи далі, що для верхнього берега $\sigma^-_{12} = \sigma^-_{22} = \sigma^-_{23} = 0$, отримуємо

$$\sigma^+_{12} = -\sigma^s_{11,1}\,, \sigma^+_{22} = \sigma^s_{11} u_{2,11}\,,\ \sigma^+_{23} = -\sigma^s_{13,1}\,. \tag{3.4}$$

З рівняння (3.3) в припущенні, що матеріали мають ортотропні властивості одержуємо:

$$\sigma^s_{11} = \sigma_0 + (C^s_{11} - \sigma_0) u_{1,1}\,,\ \sigma^s_{13} = (C^s_{12} - \sigma_0) u_{3,1}\,, \tag{3.5}$$

Підставляючи отримані співвідношення в (3.4), отримуємо:

$$\sigma^+_{12} = -\left(C^s_{11} - \sigma_0\right)^+ u^{(1)}_{1,11}, \sigma^+_{22} = -\left(\sigma_0\right)^+ u^{(1)}_{2,11},\ \sigma^+_{32} = -\left(C^s_{12} - \sigma_0\right)^+ u^{(1)}_{3,11}\,. \tag{3.6}$$

Верхні індекси (1) у правій частині означають, що формули відносяться до верхнього берега тріщини. Для нижнього берега аналіз проводиться аналогічно тільки треба враховувати, що для «мембрани» нижнього берега $\sigma^+_{12} = \sigma^+_{22} = \sigma^+_{23} = 0.$ Відповідні рівняння для нижнього берега мають вигляд:

$$\sigma^-_{12} = \left(C^s_{11} - \sigma_0\right)^- u^{(2)}_{1,11}, \sigma^-_{22} = \left(\sigma_0\right)^- u^{(2)}_{2,11}, \sigma^-_{32} = \left(C^s_{12} - \sigma_0\right)^- u^{(2)}_{3,11}\,. \tag{3.7}$$

Вводячи вектори

$$\mathbf{u} = [u_1\ u_2\ u_3]^T\,,\ \boldsymbol{\sigma}_1 = [\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}]^{\mathrm{T}}\,,\ \boldsymbol{\sigma}_2 = [\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}]^{\mathrm{T}}\,, \tag{3.8}$$

співвідношення (3.6), (3.7) можна записати в наступній матрично-векторній формі:

$$\boldsymbol{\sigma}^+_2 = -\mathbf{G}^+ \mathbf{u}^+_{,11}\,,\ \boldsymbol{\sigma}^-_2 = \mathbf{G}^- \mathbf{u}^-_{,11}\,, \tag{3.9}$$

де

$$\mathbf{G}^{\pm} = \begin{bmatrix} \left(C^s_{11} - \sigma_0\right)^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sigma_0\right)^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \left(C^s_{12} - \sigma_0\right)^{\pm} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

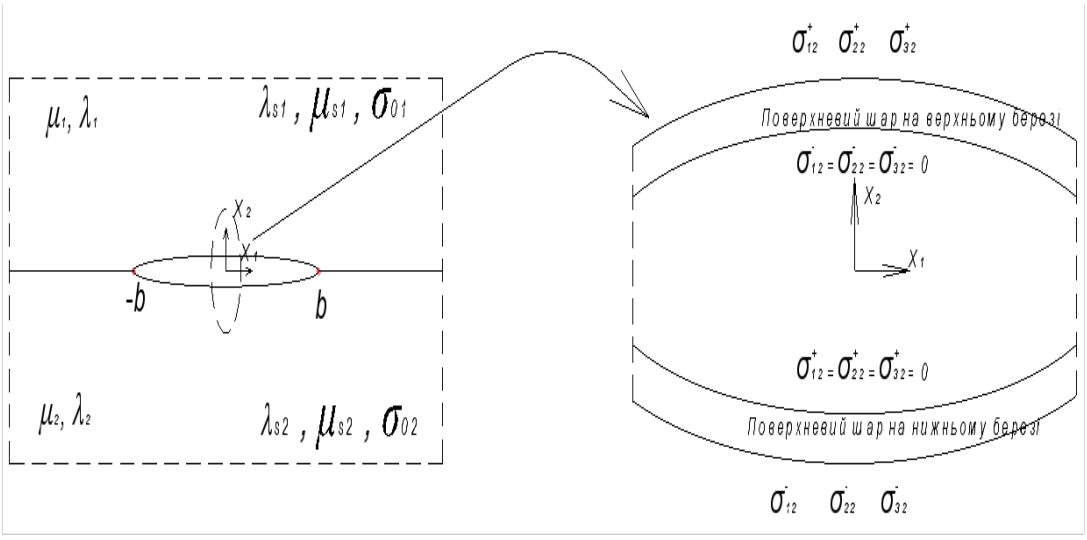
Тут для ізотропного матеріалу $\left(C_{11}^s\right)^{\pm}=\left(\lambda_s+2\mu_s\right)^{\pm}$, $\left(C_{12}^s\right)^{\pm}=\left(\mu_s\right)^{\pm}$, $\left(\lambda_s\right)^{+}=\lambda_{s1},\left(\mu_s\right)^{+}=\mu_{s1}$, $\left(\lambda_s\right)^{-}=\lambda_{s2},\left(\mu_s\right)^{-}=\mu_{s2}$.

3.2 Постановка проблеми для міжфазної тріщини з урахуванням поверхневих ефектів

Розглянемо плоску деформацію двох зв'язаних ізотропних пружних півплощин $x_2>0$ та $x_2<0$, а також тріщину $-b\le x_1\le b$ з вільними берегами під дією віддаленого рівномірного навантаження $\sigma_{12}^{\infty},\sigma_{22}^{\infty},\sigma_{32}^{\infty}$.

Нехай верхня півплощина, зайнята матеріалом «1» з пружними константами μ_1,λ_1, а нижня – матеріалом «2» з пружними константами μ_2,λ_2. Крім того, вважається, що зв'язана частина межі розділу матеріалів є ідеальною. Будемо вважати, що на кожному березі тріщини існує нескінченно тонкий поверхневий шар з пружними константами μ_{s1},λ_{s1} і μ_{s2},λ_{s2}, відповідно.

Загальний вигляд тіла з тріщиною зображено на рис. 3.1а, а фрагмент розкритої тріщини – на рис. 3.1б. Тобто, напруження на берегах тріщини рівні 0, а на інтерфейсах між поверхневими шарами і основним матеріалом вони невідомі. Поверхневі натяги верхнього та нижнього берегів тріщини σ_{01} та σ_{02}, відповідно.



а б

Рис. 3.1. Тріщина між двома ізотропними матеріалами

Розв’язок даної проблеми будемо розшукувати шляхом виведення системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, які будуть враховувати вплив поверхневих ефектів.

3.3 Виведення системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь для нанотріщини

Для формулювання системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь використаємо методику основану на розподілі лінійних дислокацій та лінійних сил на тріщині на межі розділу з поверхневою пружністю. Нехай лінійна сила f і лінійна дислокація з вектором Бюргерса b розташовані в точці $x_1 = 0$ на межі розділу матеріалів. Тоді згідно [105] маємо:

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}\ln|x_1| - \frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}\ln|x_1| - H(-x_1)\left[\mathbf{S}_1(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}) + \mathbf{H}_1(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\right],$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = -\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\ln|x_1| + \frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}\ln|x_1| + H(-x_1)\left[\mathbf{L}_1(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}) - \mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\right], \qquad (3.11)$$

$$\mathbf{u}_2 = -\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}\ln|x_1| - \frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}\ln|x_1| + H(-x_1)\left[\mathbf{S}_2(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}) + \mathbf{H}_2(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\right],$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = -\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\ln|x_1| + \frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}\ln|x_1| - H(-x_1)\left[\mathbf{L}_2(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}) - \mathbf{S}_2^{\mathrm{T}}(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\right],$$

де $H(x_1)$ – функція Хевісайда.

$$\tilde{\mathbf{S}} = -\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}+\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}})(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2)^{-1} = -(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)^{-1}(\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}+\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}})\tilde{\mathbf{L}},$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = [\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2+(\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}+\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}})(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2)^{-1}(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)]^{-1},$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)^{-1}(\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}+\mathbf{S}_2^{\mathrm{T}})]^{-1}.$$

При цьому для кожної компоненти біматеріалу справедливі формули:

$\boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\varphi}_{,2}$, $\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\varphi}_{,1}$, $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$ – вектор функції напружень, (3.12)

$\mathbf{S} = i(2\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} - \mathbf{I})$, $\mathbf{H} = 2i\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{L} = -2i\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ – тензори Барнетта-Лоте; $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – матриці пружності.

Співвідношення (3.11) справедливі для загального вигляду анізотропного матеріалу, а у випадку ізотропного матеріалу матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ мають вигляд

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -i\beta\\ i\beta & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-\mu(1+\beta^2) & i\mu\beta\\ -i\mu\beta & -\mu(1+\beta^2)\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

де $\beta=\sqrt{\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}}$.

Виконуючи диференціювання та використовуючи другу формулу з (3.12) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{+}_{,1}&=\mathbf{u}_{1,1}=-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}\frac{1}{x_1}-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}\frac{1}{x_1}+\delta(x_1)\Big[\mathbf{S_1}(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f})+\mathbf{H_1}(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}-\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\Big],\\
\boldsymbol{\sigma}^{+}_{2}&=\boldsymbol{\varphi}_{1,1}=-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}\frac{1}{x_1}-\delta(x_1)\Big[\mathbf{L_1}(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f})-\mathbf{S}_1^{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}-\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\Big],\\
\mathbf{u}^{-}_{,1}&=\mathbf{u}_{2,1}=-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}\frac{1}{x_1}-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}\frac{1}{x_1}-\delta(x_1)\Big[\mathbf{S_2}(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f})+\mathbf{H_2}(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}-\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\Big],\\
\boldsymbol{\sigma}^{-}_{2}&=\boldsymbol{\varphi}_{2,1}=-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}\frac{1}{x_1}+\delta(x_1)\Big[\mathbf{L_2}(\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f})-\mathbf{S}_2^{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}-\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{b})\Big].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Якщо лінійна сила та лінійна дислокація розподілені зі щільностями $\mathbf{f}(x_1)$ і $\mathbf{b}(x_1)$, відповідно, по проміжку $[-b;b]$, то на основі співвідношень (3.14) маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{+}_{,11}&=\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{b}(\xi)}{(\xi-x_1)^2}d\xi+\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{H}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{f}(\xi)}{(\xi-x_1)^2}d\xi-(\mathbf{H_1}\tilde{\mathbf{L}}-\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S_1})\mathbf{b}'(\mathbf{x_1})-\breve{\mathbf{W}}\mathbf{f}'(\mathbf{x_1}),\\
\boldsymbol{\sigma}^{+}_{\mathbf{2}}&=-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{L}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{b}(\xi)}{\xi-x_1}d\xi+\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{f}(\xi)}{\xi-x_1}d\xi+\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{b}(\mathbf{x_1})-(\mathbf{L_1}\tilde{\mathbf{H}}-\mathbf{S}_1^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}})\mathbf{f}(\mathbf{x_1})+\sigma_2^{\infty},\\
\mathbf{u}^{-}_{,11}&=\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{b}(\xi)}{(\xi-x_1)^2}d\xi+\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{H}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{f}(\xi)}{(\xi-x_1)^2}d\xi+(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{L_1}-\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S_1})\mathbf{b}'(\mathbf{x_1})-\breve{\mathbf{W}}\mathbf{f}'(\mathbf{x_1}),\\
\boldsymbol{\sigma}^{-}_{\mathbf{2}}&=-\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{L}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{b}(\xi)}{\xi-x_1}d\xi+\frac{1}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{f}(\xi)}{\xi-x_1}d\xi+\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{b}(\mathbf{x_1})+(\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{H_1}-\mathbf{S}_1^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}})\mathbf{f}(\mathbf{x_1})+\sigma_2^{\infty}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

де $\breve{\mathbf{W}}=-\mathbf{H_1}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}-\mathbf{S_1}\tilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H_2}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{T}}+\mathbf{S_2}\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{W}}=-\mathbf{L_1}\tilde{\mathbf{S}}-\mathbf{S}_1^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{L}}=\mathbf{L_2}\tilde{\mathbf{S}}+\mathbf{S}_2^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{L}}$.

На основі формул (3.9) розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\boldsymbol{\sigma}^{+}_{\mathbf{2}}+\boldsymbol{\sigma}^{-}_{\mathbf{2}}=-\mathbf{G}^{+}\mathbf{u}^{+}_{,11}+\mathbf{G}^{-}\mathbf{u}^{-}_{,11},\ \boldsymbol{\sigma}^{+}_{\mathbf{2}}-\boldsymbol{\sigma}^{-}_{\mathbf{2}}=-\mathbf{G}^{+}\mathbf{u}^{+}_{,11}-\mathbf{G}^{-}\mathbf{u}^{-}_{,11}. \tag{3.16}$$

Підставляючи в цю систему вирази (3.15) і використовуючи тотожність $\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{H}_1+\mathbf{L}_1\tilde{\mathbf{H}}-\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}-\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$ [105], одержуємо:

$$-\frac{2}{\pi}\tilde{\mathbf{L}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{b}(\xi)}{x_1-\xi}d\xi+\frac{2}{\pi}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{f}(\xi)}{x_1-\xi}d\xi+2\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{b}(\mathbf{x_1})+$$

$$+(\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{H}_1-\mathbf{L}_1\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}-\mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}})\mathbf{f}(\mathbf{x_1})+2\sigma_2^{\infty}= \tag{3.17}$$

$$=-\frac{1}{\pi}(\mathbf{G}^{+}-\mathbf{G}^{-})\tilde{\mathbf{S}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{b}'(\xi)}{x_1-\xi}d\xi-\frac{1}{\pi}(\mathbf{G}^{+}-\mathbf{G}^{-})\tilde{\mathbf{H}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{f}'(\xi)}{x_1-\xi}d\xi+$$

$$+[\mathbf{G}^{+}(\mathbf{H}_1\tilde{\mathbf{L}}-\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{S}})+\mathbf{G}^{-}(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{L}_1-\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S}_1)]\mathbf{b}'(\mathbf{x_1})+(\mathbf{G}^{+}-\mathbf{G}^{-})\breve{\mathbf{W}}\mathbf{f}'(\mathbf{x_1}),$$

$$\mathbf{f}(\mathrm{x}_1)=\frac{1}{\pi}(\mathbf{G}^{+}+\mathbf{G}^{-})\tilde{\mathbf{S}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{b}'(\xi)}{\xi-x_1}d\xi+\frac{1}{\pi}(\mathbf{G}^{+}+\mathbf{G}^{-})\tilde{\mathbf{H}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{f}'(\xi)}{\xi-x_1}d\xi-$$

$$-[\mathbf{G}^{+}(\mathbf{H}_1\tilde{\mathbf{L}}-\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{S}})-\mathbf{G}^{-}(\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{L}_1-\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S}_1)]\mathbf{b}'(\mathrm{x}_1)-(\mathbf{G}^{+}+\mathbf{G}^{-})\breve{\mathbf{W}}\mathbf{f}'(\mathrm{x}_1). \tag{3.18}$$

Тут враховано, що при $\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}(\pm b)+\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f}(\pm b)=0$ справедливо:

$$\tilde{\mathbf{S}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{b}(\xi)}{(\xi-x_1)^2}d\xi+\tilde{\mathbf{H}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{f}(\xi)}{(\xi-x_1)^2}d\xi=\tilde{\mathbf{S}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{b}'(\xi)}{\xi-x_1}d\xi+\tilde{\mathbf{H}}\int_{-b}^{b}\frac{\mathbf{f}'(\xi)}{\xi-x_1}d\xi.$$

Рівняння (3.17), (3.18) являють собою систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з особливостями типу Коші. Основні матриці, що входять в цю систему для випадку ізотропних матеріалів мають наступний вигляд:

$$\mathbf{S}_i=s_i\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{H_i}=\frac{1}{\mu_i\kappa_i}\cdot\begin{bmatrix}1-s_i^{\,2}&0&0\\1&1-s_i^{\,2}&0\\0&0&\kappa_i\end{bmatrix},\ \mathbf{L_i}=\mu_i\cdot\begin{bmatrix}\kappa_i&0&0\\0&\kappa_i&0\\0&0&1\end{bmatrix}(i=1,2),$$

$$\tilde{\mathbf{L}}=\begin{bmatrix}\alpha/\Omega&0&0\\0&\alpha/\Omega&0\\0&0&\dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&\beta/\Omega&0\\-\beta/\Omega&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{W}}=\begin{bmatrix}0&\gamma/\Omega&0\\-\gamma/\Omega&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

де $\kappa_i=\dfrac{1}{1-\nu_i},\ s_i=\dfrac{1-2\nu_i}{2(1-\nu_i)},\ \lambda_i=\dfrac{E_i\nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)},\ \mu_i=\dfrac{E_i}{2(1+\nu_i)},\ (i=1,2)$

$\alpha=\mu_1\kappa_1+\mu_2\kappa_2,\beta=s_1+s_2,\gamma=(\mu_1\kappa_1 s_2-\mu_2\kappa_2 s_1),$

$$\Omega = \left[(\mu_1\kappa_1 + \mu_2\kappa_2)\left(\frac{1-s_1^2}{\mu_1\kappa_1} + \frac{1-s_2^2}{\mu_2\kappa_2}\right) + (s_1+s_2)^2 \right],$$

а інші обчислюються через них та матриці **A** і **B**.

Структура матриць, що входять в систему (3.17), (3.18) показує, що ця матрично-векторна система після спрощення зводиться до наступної скалярної системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь:

$$\frac{r_{11}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \frac{r_{12}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + r_{13}b_2(x_1) + r_{14}f_1(x_1) + 2\sigma_{12}^{\infty}\Omega =$$
$$= \frac{r_{15}}{b\pi}\int_{-b}^{b}\frac{b_2'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \frac{r_{16}}{b\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \frac{r_{17}}{b}b_1'(x_1) + \frac{r_{18}}{b}f_2'(x_1) \qquad (3.19)$$

$$\frac{r_{11}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{b_2(\xi)}{\xi - x_1}d\xi - \frac{r_{12}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi - r_{13}b_1(x_1) + r_{14}f_2(x_1) + 2\sigma_{22}^{\infty}\Omega =$$
$$= \frac{r_{21}}{b\pi}\int_{-b}^{b}\frac{b_1'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi - \frac{r_{22}}{b\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \frac{r_{23}}{b}b_2'(x_1) + \frac{r_{24}}{b}f_1'(x_1) \qquad (3.20)$$

$$\Omega f_1(x_1) = \frac{r_{31}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{b_2'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \frac{r_{32}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_1'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + r_{33}b_1'(x_1) + r_{34}f_2'(x_1), \qquad (3.21)$$

$$\Omega f_2(x_1) = \frac{r_{41}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{b_1'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \frac{r_{42}}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f_2'(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + r_{43}b_2'(x_1) + r_{44}f_1'(x_1). \qquad (3.22)$$

де $\Lambda_i = \lambda_{si} + 2\mu_{si} - \sigma_{0i},\ i = 1,2$

$$r_{11} = -2\alpha,\ r_{12} = 2\beta,\ r_{13} = 2\gamma,\ r_{14} = N - M,\ r_{15} = -\beta(\Lambda_1 - \Lambda_2)b,$$

$$r_{16} = -\frac{M}{\mu_1\kappa_1}(-\Lambda_1 + \Lambda_2)b,\ r_{17} = -((s_1\beta + M)\Lambda_1 + (s_1\beta + N)\Lambda_2)b,$$

$$r_{18} = -(\Lambda_1 - \Lambda_2)Lb,\ r_{21} = -\beta(\sigma_{02} - \sigma_{01})b,\ r_{22} = -\frac{M}{\mu_1\kappa_1}(\sigma_{01} - \sigma_{02})b,$$

$$r_{23} = -((s_1\beta + M)\sigma_{01} + (s_1\beta + N)\sigma_{02})b,\ r_{24} = -(\sigma_{02} - \sigma_{01})Lb,$$

$$r_{31} = -\beta(\Lambda_1 + \Lambda_2),\ r_{32} = -\frac{M}{\mu_1\kappa_1}(\Lambda_1 + \Lambda_2),\ r_{33} = -((s_1\beta + N)\Lambda_2 - (s_1\beta + M)\Lambda_1),$$

$$r_{34} = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)L,\ r_{41} = \beta(\sigma_{02} + \sigma_{01}),\ r_{42} = -\frac{M}{\mu_1\kappa_1}(\sigma_{02} + \sigma_{01}),$$

$$r_{43} = -(-(s_1\beta + N)\sigma_{02} + (s_1\beta + M)\sigma_{01}),\ \ r_{44} = -(\sigma_{01} + \sigma_{02})L,$$

$$M = \frac{\mu_1\kappa_1(1-s_2^2) + \mu_2\kappa_2(1-s_1^2)}{\mu_2\kappa_2},\ N = \frac{(\mu_1\kappa_1 + \mu_2\kappa_2)(1-s_1^2)}{\mu_1\kappa_1},\ L = \frac{(1-s_2^2)}{\mu_2\kappa_2}s_1 - \frac{(1-s_1^2)}{\mu_1\kappa_1}s_2.$$

Додаткові умовами для цієї системи мають вигляд:

$$\int_{-b}^{b} b_1(\xi)d\xi = 0,\quad \int_{-b}^{b} b_2(\xi)d\xi = 0,\quad \int_{-b}^{b} f_1(\xi)d\xi = 0,\quad \int_{-b}^{b} f_2(\xi)d\xi = 0. \tag{3.23}$$

Слід зазначити, що подібна система для часткового випадку однакових механічних властивостей верхнього і нижнього поверхневих шарів і однакових поверхневих натягів верхнього і нижнього берега була отримана в роботі [115].

Далі ця система розглядається для загального випадку різних механічних властивостей верхнього і нижнього поверхневих шарів і різних поверхневих натягів верхнього і нижнього берега.

3.4 Числовий метод розв'язання

Переходячи за допомогою заміни $x = x_1 / b,$ до проміжку [-1,1], одержуємо

$$\int_{-1}^{1} \frac{r_{11}b_1(t) + r_{12}f_2(t)}{t-x}dt + \int_{-1}^{1} \frac{-r_{15}b_2'(t) - r_{16}f_1'(t)}{t-x}dt =$$

$$= r_{17}\pi b_1'(x) + r_{18}\pi f_2'(x) - 2\pi\sigma_{12}^{\infty}\Omega - r_{13}\pi b_2(x) - r_{14}\pi f_1(x), \tag{3.24}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{r_{11}b_2(t) - r_{12}f_1(t)}{t-x}dt + \int_{-1}^{1} \frac{-r_{21}b_1'(t) + r_{22}f_2'(t)}{t-x}dt =$$

$$= r_{23}\pi b_2'(x) - r_{24}\pi f_1'(x) - 2\pi\sigma_{12}^{\infty}\Omega + r_{13}\pi b_1(x) - r_{14}\pi f_2(x), \tag{3.25}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{r_{31}b_2'(t) + r_{32}f_1'(t)}{t-x}dt + r_{33}\pi b_1'(x) + r_{34}\pi f_2'(x) = b\pi\Omega f_1(x), \tag{3.26}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{r_{41}b_1'(t)+r_{42}f_2'(t)}{t-x}dt+r_{43}\pi b_2'(x)+r_{44}\pi f_1'(x)=b\pi\Omega f_2(x). \qquad (3.27)$$

Застосуємо для приведення рівнянь до більш зручного вигляду наступні оператори, що витікають із розв'язків характеристичного СІР з ядром типу Коші в різних класах функцій [34]:

$$T_{2nd}^{-1}\psi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\psi(t)dt-\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\psi(t)}{(t-x)}dt, \qquad (3.28)$$

$$T_{1st}^{-1}\psi(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(t)dt-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt. \qquad (3.29)$$

Тоді використовуючи, що $\int_{-1}^{1}f_1(t)=\int_{-1}^{1}b_1(t)=\int_{-1}^{1}f_2(t)=\int_{-1}^{1}b_2(t)=0$ та $r_{15}b_2(\pm1)+r_{16}f_1(\pm1)=0$ і помноживши обидві частини (3.24-3.25) на $\sqrt{1-x^2}$ матимемо наступні рівняння:

$$\sqrt{1-x^2}\,(r_{11}b_1(x)+r_{12}f_2(x)-r_{15}b_2'(x)-r_{16}f_1'(x))=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\left(r_{17}b_1'(x)+r_{18}f_2'(x)-2\sigma_{12}^{\infty}\Omega\right)}{t-x}dt-\frac{(1-x^2)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{-r_{13}b_2(t)-r_{14}f_1(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad (3.30)$$

$$\sqrt{1-x^2}\,(r_{11}b_2(x)-r_{12}f_1(x)-r_{21}b_1'(x)+r_{22}f_2'(x))=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\left(r_{23}b_2'(x)-r_{24}f_1'(x)-2\sigma_{22}^{\infty}\Omega\right)}{t-x}dt-\frac{(1-x^2)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{r_{13}b_1(t)-r_{14}f_2(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad (3.31)$$

$$r_{31}b_2'(x)+r_{32}f_1'(x)+\sqrt{1-x^2}\,(r_{33}b_1'(x)+r_{34}f_2'(x))=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{b\Omega f_1(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad (3.32)$$

$$r_{41}b_1'(x)+r_{42}f_2'(x)+\sqrt{1-x^2}\,(r_{43}b_2'(x)+r_{44}f_1'(x))=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{b\Omega f_2(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt. \qquad (3.33)$$

Будемо розшукувати $b_i(x),\ f_i(x)$ у вигляді:

$$b_i(x)=\sum_{m=0}^{N}c_{mi}T_m(x),\ f_i(x)=\sum_{m=0}^{N}d_{mi}T_m(x),\ i=1,2 \tag{3.34}$$

де $T_m(x)$ – поліном Чебишева m-го порядку першого роду, $U_{m-1}(x)$ – поліном Чебишева другого роду. Використовуємо наступні властивості цих поліномів:

$$\frac{dT_m(x)}{dx}=mU_{m-1}(x),\quad \int_{-1}^{1}\frac{U_m(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt=\pi T_{m+1}(x),$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt=\pi U_{m-1}(x).$$

Вибираючи точки колокації $x_i=-\cos(\frac{i\pi}{N}), i=1,2,...,N-1$ і враховуючи, що $T_m(x_i)=(-1)^m\cos(\frac{mi\pi}{N}),\ U_{m-1}(x_i)=\theta_{mi}$, систему (3.30)–(3.33) запишемо у вигляді

$$\sum_{m=0}^{N}\left\{\begin{array}{l}t_{mi}\left[(r_{11}+mr_{17})c_{m1}+\left(r_{12}+mr_{18}\right)d_{m2}\right]-\\-\theta_{mi}\left[\left(mr_{15}+s_i^2r_{13}\right)c_{m2}+\left(mr_{16}+s_i^2r_{14}\right)d_{m1})\right]\end{array}\right\}=-2\Omega\sigma_{12}^{\infty}\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right),$$

$$\sum_{m=0}^{N}\left\{\begin{array}{l}t_{mi}\left[(r_{11}+mr_{23})c_{m2}-\left(r_{12}+mr_{24}\right)d_{m1}\right]-\\-\theta_{mi}\left[\left(mr_{21}-s_i^2r_{13}\right)c_{m1}+\left(-mr_{22}+s_i^2r_{14}\right)d_{m2})\right]\end{array}\right\}=-2\Omega\sigma_{22}^{\infty}\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \tag{3.35}$$

$$\sum_{m=0}^{N}\left\{\theta_{mi}\left[mr_{31}c_{m2}+\left(mr_{32}+\Omega bs_i\right)d_{m1}\right]+t_{mi}\left[r_{33}c_{m1}+r_{34}d_{m2})\right]\right\}=0,$$

$$\sum_{m=0}^{N}\left\{\theta_{mi}\left[mr_{41}c_{m1}+\left(mr_{42}+\Omega bs_i\right)d_{m2}\right]+t_{mi}\left[r_{43}c_{m2}+r_{44}d_{m1})\right]\right\}=0, \tag{3.36}$$

де

$$s_{1i}=\sqrt{1-\cos^2\frac{i\pi}{N}},\ t_{mi}=(-1)^m\cos(\frac{mi\pi}{N})s_{1i},\ \theta_{mi}=(-1)^m\frac{\sin(\frac{mi\pi}{N})}{\sin(\frac{i\pi}{N})}.$$

Напруження на продовженні тріщини будемо розшукувати з другого рівняння (3.15) і після знаходження відповідних значень тензорів Барнетта-Лоте отримуємо:

$$\sigma_{22} = -\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\Omega}\int_{-b}^{b}\frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi - \frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\Omega}\int_{-b}^{b}\frac{f_2(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \frac{-s_1\alpha + \mu_1\kappa_1\beta}{\Omega}b_2(x_1) - \\ -\frac{M + s_1\beta}{\Omega}f_1(x_1) + \sigma_{22}^{\infty} \tag{3.37}$$

Оскільки функції f та b мають складну поведінку біля вершин тріщини, то перший інтеграл із (3.37) задаємо у вигляді:

$$I(x_1) = \int_{-b}^{b}\frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi = \int_{-b}^{-b+\delta}\frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \int_{-b+\delta}^{b-\delta}\frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \int_{b-\delta}^{b}\frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi, \tag{3.38}$$

Припускаючи далі, що $\delta \ll b$, вважаємо, що $b_1(\xi) = b_1(-b + \delta/2)$ на $[-b, -b+\delta]$ і $b_1(\xi) = b_1(b - \delta/2)$ на $[b-\delta, b]$. Тоді, обчислюючи 1-й і 3-й інтеграли із (3.38) аналітично, одержуємо наступну формулу

$$I(x_1) \approx \int_{-b+\delta}^{b-\delta}\frac{b_1(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + b_1\left(-b + \frac{\delta}{2}\right)\ln\left|\frac{b - \delta + x_1}{b + x_1}\right| + b_1\left(b - \frac{\delta}{2}\right)\ln\left|\frac{b - x_1}{b - \delta - x_1}\right|. \tag{3.39}$$

Для обчислення першого інтеграла у формулі (3.39) при будь-якому δ використовується формула Гауса. Аналогічним чином обчислюється і другий інтеграл у формулі (3.37).

Розкриття тріщини будемо знаходити з рівняння (3.15):

$$\mathbf{\Delta u} = \mathbf{u}^{+} - \mathbf{u}^{-} = (-\mathbf{H}_1\tilde{\mathbf{L}} + \mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{S}} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{L}_1 + \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S}_1)\int_{-b}^{x_1}\mathbf{b}(\xi)d\xi. \tag{3.40}$$

Знайшовши відповідні значення тензорів матимемо

$$\Delta u_2 = -\frac{(M + 2s_1\beta + N)}{\Omega}\int_{-b}^{x_1} b_1(\xi)d\xi \tag{3.41}$$

3.5 Результати розрахунків та їх аналіз

В табл. 3.1 та на рис. 3.2 наведено залежність напруження у вершині та на продовженні тріщини, відповідно, від її розміру, який визначається параметром $S_e = \frac{\mu_{s1} - \sigma_{01}}{b\mu_1}$. Пружні константи верхнього і нижнього поверхневих шарів тріщини вибирались рівними відповідно $\mu_{s1} = 161.73\left(Дж/м^2\right)$ і

$\mu_{s2} = 177\ \left(Дж / м^2\right)$, поверхневі натяги відповідно $\sigma_{01} = 77.73\ \left(Дж / м^2\right)$ і $\sigma_{02} = 9\ \left(Дж / м^2\right)$, а модулі зсуву $\mu_1 = 84 \cdot 10^9 \left(Па\right)$, $\mu_2 = 168 \cdot 10^9 \left(Па\right)$.

Зовнішнє навантаження задавалось співвідношенням $S = \sigma_{yy}^{\infty} / \mu_1 = 0,0002$. Легко бачити, що при такому виборі параметрів $b = 10^{-9}\, м / S_e$. Вважаючи, що $0,005 < S_e < 0,1$, отримуємо діапазон зміни розмірів тріщини від 10 нм ($S_e = 0,1$) до 200 нм ($S_e = 0,005$).

В табл. 3.1 наведені значення напруження $\sigma_{yy}\left(bx, 0\right)$ у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку. Аналіз показав, що при поступовому збільшенні кількості вузлів (n_{Gauss}) квадратурної формули Гауса спостерігається досягнення хорошої збіжності результатів при досягненні $n_{Gauss} = 30$. При подальшому збільшенні n_{Gauss} значення напруження $\sigma_{yy}\left(bx, 0\right)$ вже майже не змінюються. В табл. 3.1 наведено поступове збільшення кількості членів (N) у розкладеннях (3.34) при сталому значенні $n_{Gauss} = 30$. Спостерігається стабілізація результатів по досягненню певного значення кількості членів ($N = 300$). Подальше збільшення N показує, що результати вже практично не змінюються. Результати, наведені на наступних графіках отримані при $n_{Gauss} = 30$ і $N = 300$.

Табл. 3.1. Значення напруження $\sigma_{yy}(bx, 0) / \mu_1$, 10^{-3} у вершині тріщини при різній кількості членів у розкладеннях (3.34)

S_e	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$	$N = 300$	$N = 325$
0,1	0,25119	0,28107	0,27738	0,30595	0,29762	0,29762
0,05	0,25250	0,28690	0,32976	0,32857	0,31905	0,31917
0,01	0,30762	0,38929	0,43929	0,47619	0,48571	0,48929
0,005	0,36548	0,45595	0,50952	0,50238	0,53333	0,53810

З табл. 3.1 можна побачити, що врахування поверхневої пружності усуває сингулярність у вершинах нано-тріщини і дозволяє отримати скінченні значення напружень у цих вершинах.

На рис. 3.2 лінія I відповідає $S_e = 0{,}1$, лінія II – $S_e = 0{,}05$, лінія III – $S_e = 0{,}01$, лінія IV – $S_e = 0{,}005$.

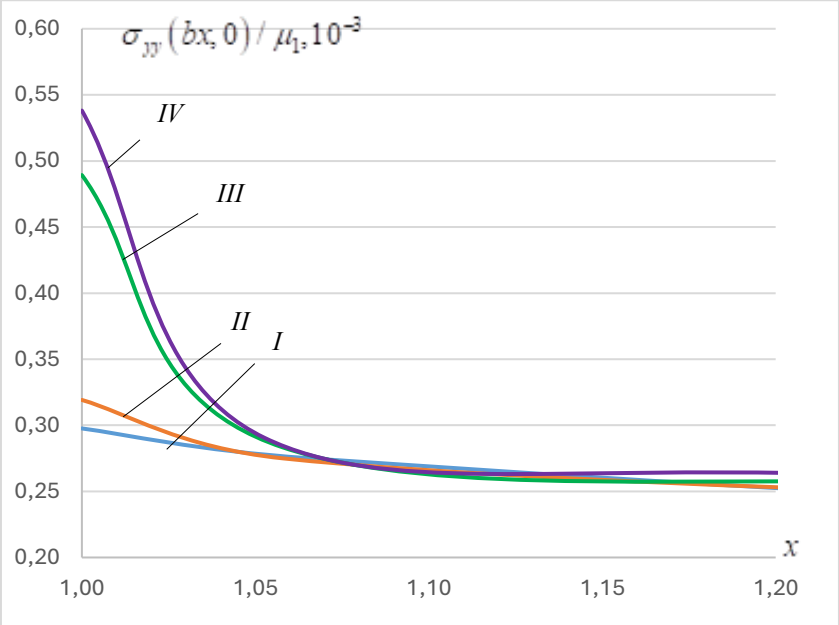


Рис.3.2 Розподіл напружень для різних значень параметра S_e і

$$S = \sigma_{yy}^{\infty} / \mu_1 = 0{,}0002$$

Аналіз поведінки $\sigma_{yy}(bx,0)/\mu_1$ для x значно більших одиниці показує, що нормовані величини цього напруження на віддаленні від вершини тріщини збігаються до значення 0,0002, що узгоджується з величиною прикладеного віддаленого напруження.

З рис.3.2 видно, що напруження у вершині тріщини і в деякому її околі від її вершини зі збільшенням розміру тріщини суттєво зростає.

На рис. 3.3 наведено залежність напруження на продовженні тріщини при зміні значення зовнішнього навантаження в діапазоні $0{,}0005 < S < 0{,}002$ і поверхневому напруженні $S_e = 0{,}05$. Рис. 3.3 будувався при тих же характеристиках матеріалу, що і рис. 3.2.

Лінія I відповідає – $S = 0{,}002$, II – $S = 0{,}001$, III – $S = 0{,}0005$.

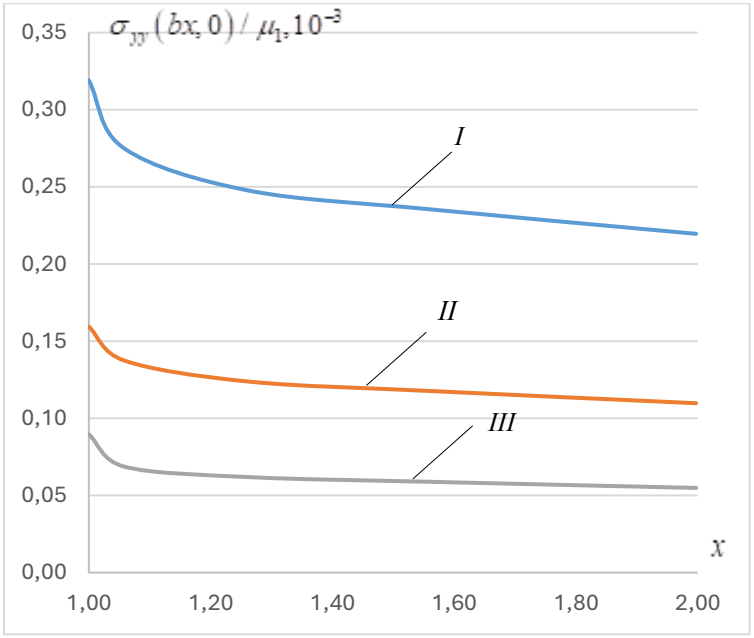


Рис.3.3 Залежність напруження на продовженні тріщини при зміні S

Рис. 3.4 демонструє залежність напруження на продовженні тріщини при зміні значень пружних констант поверхневого шару на берегах тріщини: крива I побудована для пружної константи на нижньому березі $\mu_{s2} = 177\ \left(Дж/м^2\right)$, II – $\mu_{s2} = 192\ \left(Дж/м^2\right)$, III – $\mu_{s2} = 207\ \left(Дж/м^2\right)$, IV – $\mu_{s2} = 222\ \left(Дж/м^2\right)$, і параметрах верхнього берега таких же як і на рис. 2.

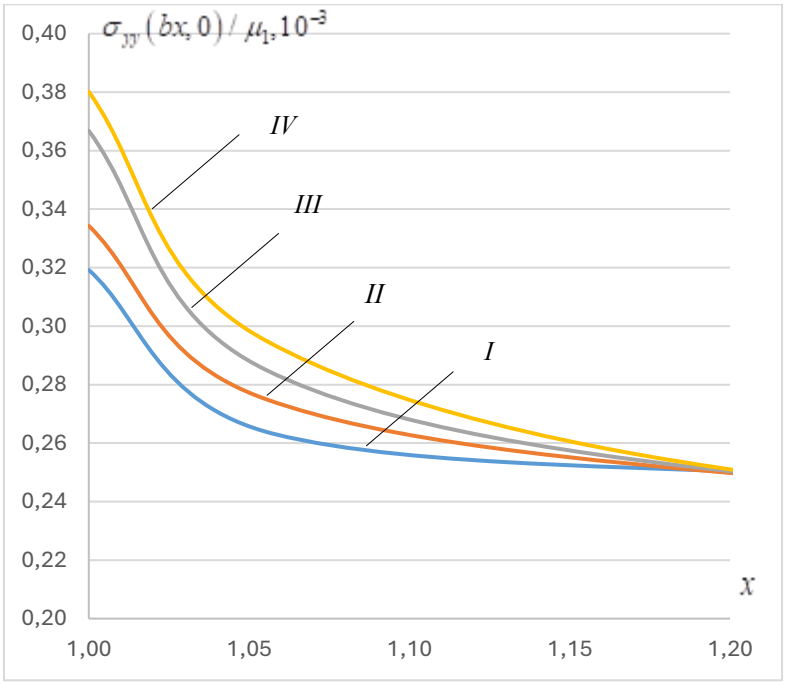


Рис.3.4 Залежність напруження на продовженні тріщини при зміні значень пружних констант на берегах тріщини

Аналіз графіку показує збільшення $\sigma_{yy}(bx,0)/\mu_1$ у вершині тріщини при збільшенні поверхневого напруження на нижньому березі тріщини. Рис. 3.5, побудований при тих же значеннях вхідних параметрів, що і 3.4, показує, що збільшення μ_{s2} збільшує різницю переміщень берегів тріщини. Зміна напруження $\sigma_{yy}(bx,0)/\mu_1$ при зміні поверхневого напруження на берегах тріщини невеликих розмірів зумовлена домінуванням поверхневого напруження в наномаштабі, де воно може збільшувати або зменшувати концентрацію напружень біля вершини тріщини. Результати вказують на те, що відповідні напруження суттєво залежать від розміру тріщини.

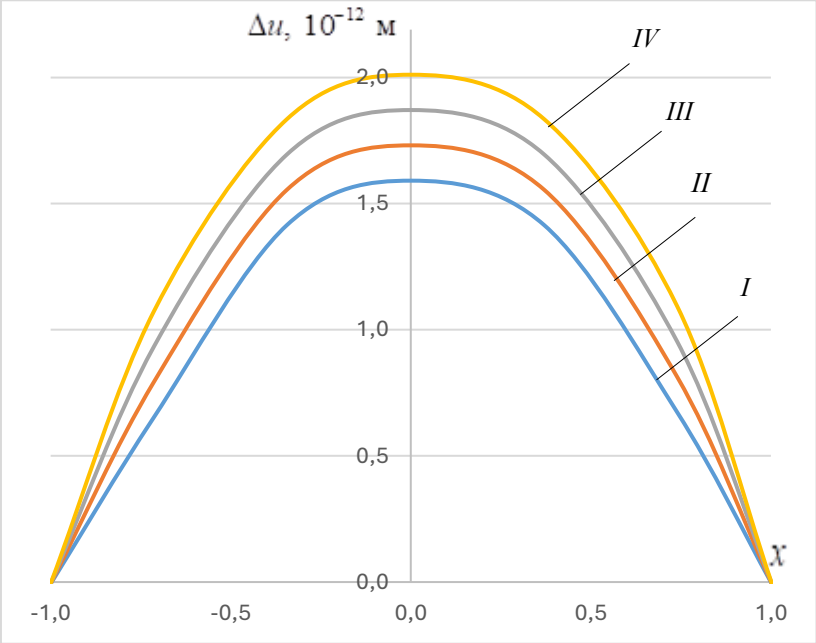


Рис.3.5 Залежність розкриття тріщини при зміні поверхневого напруження на її берегах

На рис. 3.6 наведено залежність напруження на продовженні тріщини при зміні модуля зсуву верхнього матеріалу: крива I побудована для $\mu_1 = 84 \cdot 10^9 \left(Па\right)$, II – $\mu_1 = 42 \cdot 10^9 \left(Па\right)$, III – $\mu_1 = 21 \cdot 10^9 \left(Па\right)$ при $S_e = 0,05$ і тих же інших характеристиках матеріалів, що і рис. 3.2.

З рис. 3.6 видно, що при зменшенні модуля зсуву верхнього матеріалу напруження на продовженні тріщини $\sigma_{yy}(bx,0)$ зменшується в деякому околі від

вершини тріщини, тоді як напруження на віддаленні від вершини тріщини збігаються до значення, що узгоджується з величиною прикладеного віддаленого напруження.

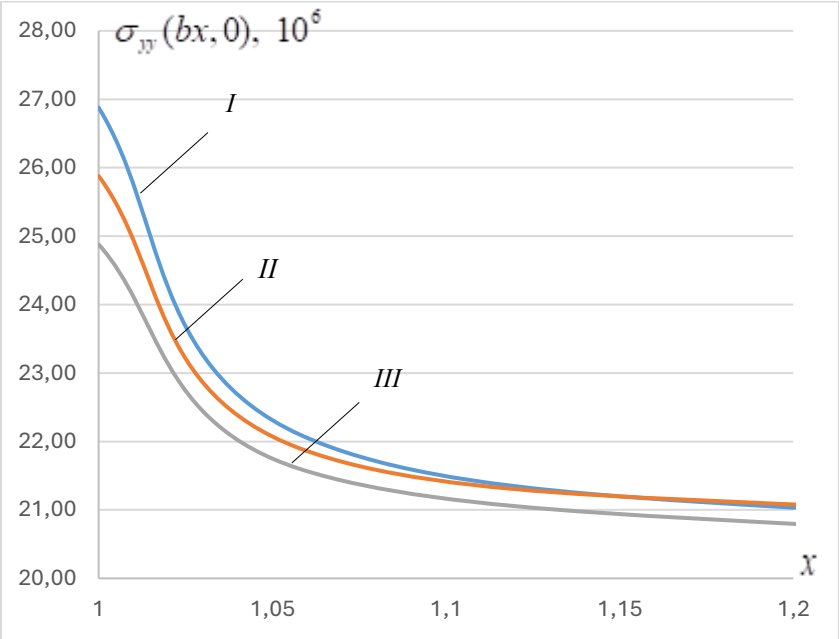


Рис.3.6 Залежність напруження на продовженні тріщини при зміні модуля зсуву верхнього матеріалу

Для тріщин, довжина яких набагато більша 1 мкм, проведено порівняння результатів розрахунків з класичними (без урахування поверхневої пружності) і отримане хороше узгодження. Зокрема, розкриття міжфазної тріщини під дією лише нормального напруження на нескінченності в класичному випадку визначається формулою:

$$\Delta u_2(x_1) = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\gamma g} Re\left[\left(\frac{x_1+b}{x_1-b}\right)^{i\varepsilon}\sqrt{b^2-x_1^2}\right] \qquad (3.42)$$

де $g = 2\mu_1\mu_2/(\kappa_1\mu_2+\mu_1)$, $\gamma = (\kappa_1\mu_2+\mu_1)/(\kappa_2\mu_1+\mu_2)$, $\varepsilon = \ln\gamma/(2\pi)$, $\kappa_i = 3-4\nu_i$

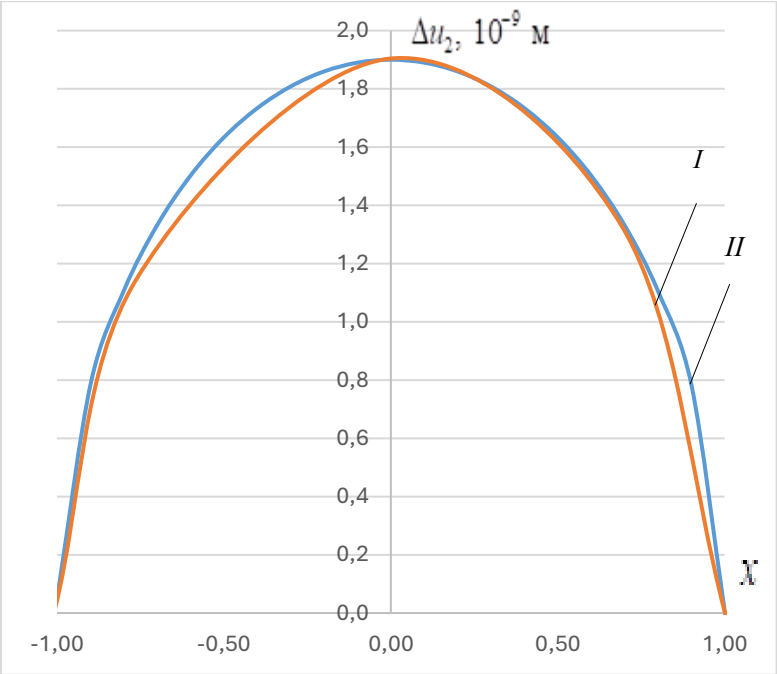


Рис.3.7 Порівняльний аналіз розкриття тріщини

Результати розрахунку по формулі (3.42), а також по вищевикладеній методиці для тріщини довжини 20 мкм наведені на рис. 3.7. На цьому рисунку лінія I відповідає значенням, отриманим в рамках моделі Гуртина-Мердока, а лінія II –результатам класичної моделі. З цього рисунка видно, що значення розкриття тріщини, які отримані різними методами, співпадають з високою точністю.

3.6 Висновки до третього розділу

Врахування поверхневої пружності за моделлю Гуртина-Мердока дозволяє усунути сингулярність напружень у вершинах тріщини, що призводить до скінченних значень напружень у вершинах та їхньому околі. Це підтверджується результатами чисельних розрахунків, наведених у табл. 3.1. Аналіз показує, що при збільшенні розміру тріщини (від 10 нм до 200 нм) напруження в околі її вершини суттєво зростає. Збільшення поверхневого напруження на берегах тріщини, особливо на нижньому березі, призводить до збільшення нормального напруження у вершині тріщини. Це також впливає на розкриття тріщини, що підтверджується графіком на рис. 3.5.

Для тріщин нанометрових розмірів поверхневе напруження відіграє ключову роль, значно збільшуючи або зменшуючи концентрацію напружень біля вершини тріщини. Зі збільшенням розміру тріщини вплив поверхневих ефектів зменшується, і напруження визначається переважно об'ємними властивостями матеріалів та зовнішнім навантаженням.

При чисельному аналізі для досягнення необхідної точності розрахунків проводилось поступове збільшення кількості вузлів квадратурної формули Гауса (n_{Gauss}) до досягнення збіжності, а потім збільшення кількості членів (N) у розкладеннях поліномів Чебишева, що забезпечує стабільність результатів. Порівняльний аналіз між результатами отриманими в рамках моделі Гуртина-Мердока з класичною моделлю показує хороше співпадіння результатів для тріщин розмірів 20 мкм і більше.

Отримані результати можуть бути використані для прогнозування поведінки тріщин у біматеріальних системах, що є важливим для розробки міцних та надійних матеріалів у нано- та мікротехнологіях, де поверхневі ефекти відіграють значну роль. Оскільки результати, даного розділу стосуються в першу чергу нано-тріщин, то вони будуть справедливими і для більшості біматеріальних з'єднань скінчених розмірів по одному або кількох напрямках. Наприклад, завдяки принципу Сен-Венана вони будуть справедливими для нано-тріщини типу I між накладкою мезо-метрової товщини і пружною основою під дією розтягувального навантаження.

РОЗДІЛ 4. АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ НАНОСТРУКТУР ТА КВАЗІКРИСТІВ З ТРІЩИНАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ПОВЕРХНЕВИХ ЕФЕКТІВ

4.1 Дослідження впливу поверхневої пружності на напружено-деформований стан нанотріщини типу III

4.1.1 Математичне формулювання задачі антиплоскої деформації для нанорозмірного об'єкта

Розглянемо антиплоску деформацію лінійно пружного, однорідного ізотропного твердого тіла, що займає циліндричну область в тривимірному просторі з твірними, паралельними осі z прямокутної декартової системи координат. Припустимо, що циліндр нескінченний у довжину та піддається рівномірному віддаленому зсувному напруженню σ_{yz}^{∞}. Припустимо, що циліндр містить одну внутрішню тріщини, що проходить по всій довжині циліндра. У типовому поперечному перерізі тріщина займає область $[-b, b]$ осі x (рис. 4.1).

Для заданої тріщини типу III враховуються поверхневі ефекти в рамках моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока. Будемо вважати, що на берегах тріщини існує нескінченно тонкий поверхневий шар з пружними константами μ_s, λ_s.

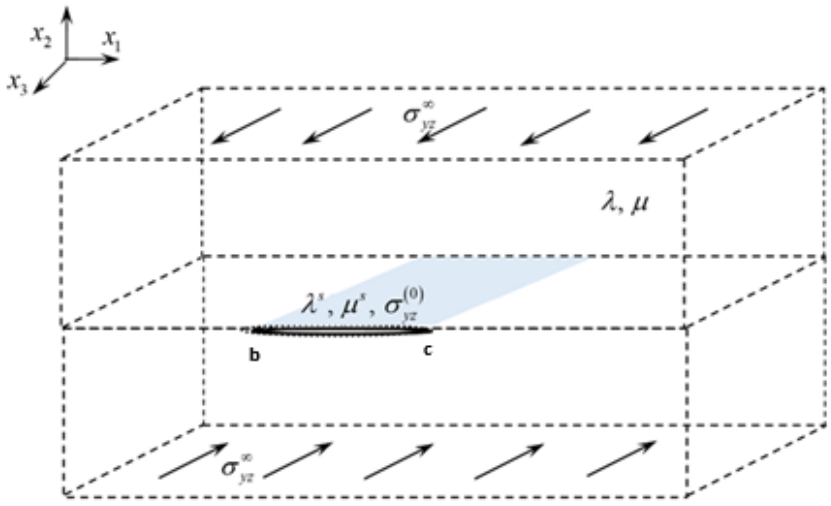


Рис. 4.1 Нанотріщина в пружному тілі під дією антиплоского навантаження

4.1.2 Побудова сингулярного інтегро-диференціального рівняння

За відсутності об'ємних сил рівняння рівноваги та визначальні рівняння, що описують деформацію лінійно пружних, однорідних та ізотропних твердих тіл, мають вигляд:

$$div\,\boldsymbol{\sigma} = 0\,,\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda\,\mathbf{I}_3\,Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{4.1}$$

де λ та μ – константи Ламе матеріалу; $\boldsymbol{\sigma}$ та $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензори напруження та деформації відповідно; а $\mathbf{I}_3$ – одиничний тензор в тривимірному просторі. Ці рівняння описують основний матеріал тіла.

У моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока поверхня тріщини розглядається як тонка пружна мембрана (з пружними константами, відмінними від основного матеріалу), ідеально з'єднана з навколишнім матеріалом. Застосуємо цю модель до поставленої задачі.

Рівняння (4.1) залишаються справедливими в основному матеріалі, а рівновага на поверхні тріщини описується рівняннями:

$$\left[\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}\right] + div_s\,\boldsymbol{\sigma}^s = 0\,, \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \sigma_o\mathbf{I}_2 + 2\left(\mu^s - \sigma_0\right)\boldsymbol{\varepsilon}^s + \left(\lambda^s + \sigma_0\right)Tr(\boldsymbol{\varepsilon}^s)\mathbf{I}_2\,, \tag{4.3}$$

тут індекс s, як і в розділі III, позначає відповідну величину, що є результатом впливу поверхневої пружності, n представляє собою одиничну нормаль до поверхні тріщини, $\mathbf{I}_2$ є одиничним тензором в двовимірному просторі, $\left[*\right] = \left(*\right)^+ - \left(*\right)^-$ позначають стрибок відповідної величини через поверхневий шар (тут "+" і "–" відносяться, відповідно, до верхньої та нижньої поверхонь шару, як показано на рис. 4.1), а через σ_0 позначено поверхневий натяг. Зазначимо, що до рівняння (4.3) включено лише компоненти поверхневої деформації (тобто деформації, нормальні до поверхні, виключені).

Поверхнева дивергенція $div_s\,\mathbf{u}$ визначається (в загальному випадку) як

$$div_s\,\mathbf{u} = div_s\,\mathbf{u}_s - 2k\,u_n\,,$$

де k – середня кривизна, а вектор переміщення $\mathbf{u}$ допускає таке однозначне розкладення:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + u_n \mathbf{n},$$

де $\mathbf{u}_s$ є відповідним тангенціальним зміщенням, а u_n – нормальна компонента вектора $\mathbf{u}$.

У випадку антиплоского зсуву в ізотропному пружному середовищі (задача про тріщину типу III) вектор переміщення $\mathbf{u}$ з компонентами u, v, w задовольняє умовам

$$u(x,y) = v(x,y) = 0,\ w = w(x,y),\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Із співвідношень Коші витікає, що компоненти деформації задаються так

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x},\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y},\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0. \tag{4.4}$$

З рівняння (4.4) компоненти тензора напружень можна записати як

$$\sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu\frac{\partial w}{\partial x},\ \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{4.5}$$

а інші компоненти напруження дорівнюють нулю.

Оскільки $w(x,y)$ є гармонійною функцією, позначаємо через $\psi(x,y)$ спряжену до неї гармонійну функцію. Вводячи комплексну змінну $z = x + iy$, можемо записати.

$$w = \mathrm{Re}\left[F(z)\right],\ F(z) = w(x,y) + i\psi(x,y). \tag{4.6}$$

де $F(z)$ є аналітичною функцією z на площині $S = S^+ \cup S^-$ поза межами тріщини (рис. 4.1). Тоді з рівняння (4.6) маємо

$$\frac{dF}{dz}(z) = F'(z) = \frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(\sigma_{xz} - i\sigma_{yz}\right),$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu i}{2}\left[F'(z) - \overline{F'(z)}\right],\ \sigma_{xz} = \frac{\mu}{2}\left[\overline{F'(z)} + F'(z)\right]. \tag{4.7}$$

Для формулювання рівняння рівноваги на поверхні тріщини позначимо через $\{e_i\}_{i=1}^3$ вектори стандартного базису тривимірного простору. Тоді на основі

рівняння (4.2) умови рівноваги на поверхні тріщини запишуться у вигляді [59, 60].

$$\sigma^s_{\alpha\beta,\beta} e_\alpha + \left[\sigma_{ij} n_j e_i\right] = 0,\ k_{\alpha\beta}\sigma^s_{\alpha\beta} = \left[\sigma_{ij} n_i n_j\right], \tag{4.8}$$

де $\alpha, \beta = 1, 3$.

Враховуючи, що в нашому випадку нормаль до поверхні тріщини спрямована вздовж e_2 або напрямку y, рівняння (4.8) набувають вигляду

$$\sigma^s_{xx,x} + \sigma^s_{xz,z} + \left[\sigma_{xy}\right] = 0,\ \sigma^s_{zx,x} + \sigma^s_{zz,z} + \left[\sigma_{yz}\right] = 0, \tag{4.9}$$

$$\left[\sigma_{yy}\right] = -\sigma_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{4.10}$$

$$\sigma^s_{\alpha\beta} = \sigma_0\delta_{\alpha\beta} + 2\left(\mu^s - \sigma_0\right)\varepsilon_{\alpha\beta} + \left(\lambda^s + \sigma_0\right)\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}, \tag{4.11}$$

де $\alpha, \beta, \gamma = 1, 3$.

З останніх рівнянь та (4.4) і (4.5) витікають співвідношення між поверхневими (на берегах тріщини) та основними напруженнями у вигляді

$$\sigma^s_{xz} = 2\left(\mu^s - \sigma_0\right)\varepsilon_{xz} = \frac{\mu^s - \sigma_0}{\mu}\sigma_{xz},\ \sigma^s_{yz} = 2\left(\mu^s - \sigma_0\right)\varepsilon_{yz} = \frac{\mu^s - \sigma_0}{\mu}\sigma_{yz} \tag{4.12}$$

У цих рівняннях враховано, що для взаємозв'язаного інтерфейсу деформації на поверхні дорівнюють деформаціям у прилеглому основному матеріалі, тобто $\varepsilon^s_{xz} = \varepsilon_{xz}$ та $\varepsilon^s_{yz} = \varepsilon_{yz}$.

Враховуючи далі, що розглядається антиплоский зсув, рівняння (4.9), (4.10) можуть бути зведені до вигляду

$$\sigma^s_{xz,x} + \left[\sigma_{yz}\right] = 0. \tag{4.13}$$

Позначимо границі нижньої $y < 0$ та верхньої $y > 0$ півплощин знаками "–" та "+", відповідно. Тоді, з рівняння (4.13), граничні умови на поверхні тріщини можна записати як

$$\frac{\partial\sigma^s_{xz}}{\partial x} + \left(\sigma_{yz}\right)^+ - \left(\sigma_{yz}\right)^- = 0, \text{ на верхньому березі,} \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial\sigma^s_{xz}}{\partial x} + \left(\sigma_{yz}\right)^+ - \left(\sigma_{yz}\right)^- = 0, \text{ на нижньому березі,} \tag{4.15}$$

причому в (4.14) $\left(\sigma_{yz}\right)^{-}=\sigma_{yz}^{(0)}$, а в (4.15) $\left(\sigma_{yz}\right)^{+}=\sigma_{yz}^{(0)}$, де $\sigma_{yz}^{(0)}$ – рівномірне зсувне напруження, що прикладене до берегів тріщини.

З рівнянь (4.4), (4.7), (4.12), (4.14) і (4.15), для тріщини $-b<x<b$, $y=0$, береги якої зазнають рівномірного зсувного напруження $\sigma_{yz}^{(0)}$, умови на берегах тріщини можна записати наступним чином.

На верхньому березі:

$$\left(\sigma_{yz}\right)^{+}=\sigma_{yz}^{(0)}-\frac{\partial\sigma_{xz}^{s}}{\partial x}=\sigma_{yz}^{(0)}-\left(\mu^{s}-\sigma_{0}\right)\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}=\sigma_{yz}^{(0)}-\frac{\mu^{s}-\sigma_{0}}{2}\left[F''(z)+\overline{F''(z)}\right]^{+}. \qquad (4.16)$$

На нижньому березі

$$\left(\sigma_{yz}\right)^{-}=\sigma_{yz}^{(0)}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{s}}{\partial x}=\sigma_{yz}^{(0)}+\left(\mu^{s}-\sigma_{0}\right)\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}=\sigma_{yz}^{(0)}+\frac{\mu^{s}-\sigma_{0}}{2}\left[F''(z)+\overline{F''(z)}\right]^{-}. \qquad (4.17)$$

Будемо також вважати, що задане рівномірне зсувне напруження $\sigma_{yz}=\sigma_{yz}^{\infty}$ на нескінченності.

Враховуючи (4.16) та (4.17), з рівнянь (4.7) можна сформулювати умови на берегах тріщини.

На верхньому березі:

$$\frac{\mu i}{2}\left[F'(z)-\overline{F'(z)}\right]^{+}=\sigma_{yz}^{(0)}-\frac{\mu^{s}-\sigma_{0}}{2}\left[F''(z)+\overline{F''(z)}\right]^{+}. \qquad (4.18)$$

На нижньому:

$$\frac{\mu i}{2}\left[F'(z)-\overline{F'(z)}\right]^{-}=\sigma_{yz}^{(0)}+\frac{\mu^{s}-\sigma_{0}}{2}\left[F''(z)+\overline{F''(z)}\right]^{-}. \qquad (4.19)$$

При антиплоскій деформації (тріщина типу III) очевидно, що $w^{+}=-w^{-}$. Тоді на основі (4.6) рівняння (4.18) та (4.19) можна записати у вигляді:

на верхньому березі:

$$\frac{\mu i}{2}\left[F'(z)-\overline{F'(z)}\right]^{+}=\sigma_{yz}^{(0)}+\frac{\mu^{s}-\sigma_{0}}{2}\left[F''(z)+\overline{F''(z)}\right]^{-}, \qquad (4.20)$$

на нижньому:

$$\frac{\mu i}{2}\left[F'(z)-\overline{F'(z)}\right]^{-}=\sigma_{yz}^{(0)}+\frac{\mu^{s}-\sigma_{0}}{2}\left[F''(z)+\overline{F''(z)}\right]^{-}. \qquad (4.21)$$

Оскільки ми припустили рівномірний розподіл напружень на нескінченності і на берегах тріщини, то на основі першого рівняння (4.7) маємо

$$F'(z)+\bar{F}'(z)=0,$$

звідки отримуємо

$$F'(z)=-\bar{F}'(z). \tag{4.22}$$

Нагадаємо [82], що

$$\bar{F}(z)=\overline{F(\bar{z})} \text{ і } \overline{F^{+}(x)}=\bar{F}^{-}(x),\ \overline{F^{-}(x)}=\bar{F}^{+}(x). \tag{4.23}$$

Склавши рівняння (4.20) та (4.21) маємо

$$\frac{\mu i}{2}\left(\left[F'(z)-\overline{F'(z)}\right]^{+}+\left[F'(z)-\overline{F'(z)}\right]^{-}\right)=2\sigma_{yz}^{(0)}+\left(\mu^{s}-\sigma_{0}\right)\left(F''(z)^{-}+\overline{F''(z)}^{-}\right). \tag{4.24}$$

Використовуючи (4.23), отримуємо

$$\frac{\mu i}{2}\left(F'(z)^{+}+F'(z)^{-}-\overline{F'(z)}^{+}-\overline{F'(z)}^{-}\right)=2\sigma_{yz}^{(0)}+\left(\mu^{s}-\sigma_{0}\right)\left(F''(z)^{-}-F''(z)^{+}\right). \tag{4.25}$$

Але згідно з (4.22) та (4.23) маємо

$$-\overline{F'(z)}^{+}-\overline{F'(z)}^{-}=-\bar{F}'(z)^{-}-\bar{F}'(z)^{+}=F'(z)^{-}+F'(z)^{+}.$$

Тоді рівняння (4.25) приймає вигляд:

$$\mu i\left(F'(z)^{+}+F'(z)^{-}\right)=2\sigma_{yz}^{(0)}+\left(\mu^{s}-\sigma_{0}\right)\left(F''(z)^{-}-F''(z)^{+}\right). \tag{4.26}$$

Далі, запишемо невідому функцію $F(z)$ як інтеграл типу Коші [82]:

$$F'(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-b}^{b}\frac{f(t)dt}{t-z}+\frac{1}{\mu i}\sigma_{yz}^{\infty}. \tag{4.27}$$

Тоді, враховуючи вимогу обмеженості напружень на кінцях тріщини, отримаємо:

$$F''(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-b}^{b}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{2}}=-\left[\frac{f(t)}{t-z}\right]_{-b}^{b}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-b}^{b}\frac{f'(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-b}^{b}\frac{f'(t)dt}{t-z}, \tag{4.28}$$

де $f(t_0)=F'(z)^{+}-F'(z)^{-}$, $-b\le t_0\le b$, $f(b)=f(-b)=0$ (скінченне напруження у вершинах тріщини).

З рівнянь (4.26), (4.27) та (4.28) отримуємо таке сингулярне інтегро-диференціальне рівняння першого порядку типу Коші для невідомої функції $f(t)$ при $t \in [-b, b]$:

$$\frac{\mu}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)dt}{t-t_0}+(\mu^s-\sigma_0)f'(t_0)=-2\left(\sigma_{yz}^{\infty}-\sigma_{yz}^{(0)}\right),\ -b\le t_0\le b,\ f(b)=f(-b)=0. \quad (4.29)$$

4.1.3 Числовий метод розв'язання та аналіз результатів

Якщо покласти $\xi = t/b$, $\xi_0 = t_0/b$ у рівнянні (4.29), то отримаємо

$$\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(b\xi)d\xi}{\xi-\xi_0}+(\mu^s-\sigma_0)\frac{df(b\xi_0)}{d(b\xi_0)}=-2\left(\sigma_{yz}^{\infty}-\sigma_{yz}^{(0)}\right),\ -1\le\xi_0\le 1. \quad (4.30)$$

Додатково позначаючи $g(\xi)=f(b\xi)$, з рівняння (4.30) отримуємо:

$$\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(\xi)dt}{\xi-\xi_0}+\frac{(\mu^s-\sigma_0)}{b}\frac{dg(\xi_0)}{d\xi_0}=-2\left(\sigma_{yz}^{\infty}-\sigma_{yz}^{(0)}\right),\ -1\le\xi_0\le 1,\ g(1)=g(-1)=0. \quad (4.31)$$

Розв'язок рівняння (4.31) на основі [29] має вигляд

$$g(\xi_0)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi_0^2}}\int_{-1}^{1}g(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\mu\pi\sqrt{1-\xi_0^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{t-\xi_0}\left(2\left(\sigma_{yz}^{\infty}-\sigma_{yz}^{(0)}\right)+\frac{(\mu^s-\sigma_0)}{b}\frac{dg(\xi)}{d\xi}\right)d\xi,$$

$$\xi_0\in(-1,1),\ g(1)=g(-1)=0. \quad (4.32)$$

Помноживши обидві частини на $\sqrt{1-\xi_0^2}$ маємо

$$g(\xi_0)\sqrt{1-\xi_0^2}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g(\xi)d\xi-\left(\frac{\mu^s-\sigma_0}{b\mu\pi}\right)\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0}\frac{dg(\xi)}{d\xi}d\xi=$$

$$=\frac{2\left(\sigma_{yz}^{\infty}-\sigma_{yz}^{(0)}\right)}{\mu\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0}d\xi. \quad (4.33)$$

Будемо розшукувати функцію $g(\xi_0)$ у формі

$$g(\xi_0)=\sum_{m=0}^{N}a_m T_m(\xi_0),\ \xi_0\in[-1,1], \quad (4.34)$$

де $T_m(\xi_0)$ представляє m -й поліном Чебишева першого роду.

Застосовуючи крайові умови $g(1)=g(-1)=0$ і використовуючи рівняння (4.31), знаходимо, що

$$g(-1)=\sum_{m=0}^{N}a_m T_m(-1)=\sum_{m=0}^{N}a_m(-1)^m=0,$$

$$g(1)=\sum_{m=0}^{N}a_m T_m(1)=\sum_{m=0}^{N}a_m=0,\ T_m(-1)=(-1)^m,\ T_m(1)=1. \tag{4.35}$$

Крім того, для поліному Чебишева другого роду $U_m(x)$, маємо

$$\frac{dT_m(x)}{dx}=mU_{m-1}(x). \tag{4.36}$$

Отже, з рівнянь (4.34) і (4.36) знаходимо, що

$$\frac{dg(\xi_0)}{d\xi_0}=\frac{d}{d\xi_0}\left(\sum_{m=0}^{N}a_m T_m(\xi_0)\right)=\sum_{m=0}^{N}m\,a_m U_{m-1}(\xi_0),\ \xi_0\in[-1,1]. \tag{4.37}$$

Підставляючи рівняння (4.34) та (4.37) до рівняння (4.33), маємо

$$\sum_{m=0}^{N}a_m\left[T_m(\xi_0)\sqrt{1-\xi_0^2}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}T_m(\xi)d\xi-m\left(\frac{\mu^s-\sigma_0}{b\mu\pi}\right)\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0}U_{m-1}(\xi)d\xi\right]=$$

$$=\frac{2\left(\sigma_{yz}^{\infty}-\sigma_{yz}^{(0)}\right)}{\mu\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_0}d\xi,\ \xi_0\in[-1,1]. \tag{4.38}$$

Використовуємо властивості ортогональності поліному Чебишева та наступні інтегральні співвідношення:

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_n(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}dt=-\pi T_{n+1}(x),\ n=0,1,2,\ldots,\ \int_{-1}^{1}T_m(x)dx=\frac{1+(-1)^m}{1-m^2},\ m=0,1,2,\ldots. \tag{4.39}$$

Отже, на основі (4.39) рівняння (4.38) зводиться до вигляду

$$\sum_{m=0}^{N}a_m\left[T_m(\xi_0)\sqrt{1-\xi_0^2}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^m}{1-m^2}\right)+\left(\frac{\mu^s-\sigma_0}{b\mu}\right)mT_m(\xi_0)\right]=-\frac{2\left(\sigma_{yz}^{\infty}-\sigma_{yz}^{(0)}\right)}{\mu}T_1(\xi_0).$$

Виберемо множину точок колокації $\xi_{0i} = -cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)$, $i = 1,2,\ldots,N-1$, і в результаті отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_m:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \left[T_m\left(\xi_{0i}\right)\sqrt{1-\xi_{0i}^2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^m}{1-m^2}\right) + \left(\frac{\mu^s - \sigma_0}{b\mu}\right) m\, T_m\left(\xi_{0i}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2\left(\sigma_{yz}^{\infty} - \sigma_{yz}^{(0)}\right)}{\mu} T_1\left(\xi_{0i}\right),\ i = 1,2,...,N-1. \qquad (4.40)$$

Враховуючи властивість поліномів Чебишева першого роду $T_m\left(\cos\theta\right) = \cos m\theta$, система (4.40) зводиться до наступного вигляду:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \left[-cos\left(\frac{mi\pi}{N}\right)\sqrt{1-\left(cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)\right)^2} - \frac{1+(-1)^m}{\pi(1-m^2)} - mS_e cos\left(\frac{mi\pi}{N}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\left(\sigma_{yz}^{\infty} - \sigma_{yz}^{(0)}\right)}{\mu} cos\left(\frac{i\pi}{N}\right),\ i = 1,2,...,N-1, \qquad (4.41)$$

тут $S_e = \frac{\mu^s - \sigma_0}{b\mu}$ – поверхневе напруження. В подальшому будемо позначати $\tilde{S} = \frac{\sigma_{yz}^{\infty} - \sigma_{yz}^{(0)}}{\mu}$ та $S = \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\mu}$ – нормоване напруження на нескінченності.

Крім того, з рівнянь, що витікають з граничних умов (4.35) маємо:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m = 0 \text{ для } i = 0,\ \sum_{m=0}^{N} a_m (-1)^m = 0 \text{ для } i = N. \qquad (4.42)$$

Отже, розв'язання рівняння (4.29) зведено до розв'язання системи рівнянь (4.41) і (4.42) відносно невідомих коефіцієнтів a_m. В подальшому коефіцієнти a_m підставляються до формули (4.34) для отримання невідомої функції $g\left(\xi_0\right)$.

Зробимо чисельне розв'язання рівнянь (4.41) і (4.42) для діапазону параметрів поверхні, отриманих з роботи [95]. Проведемо спочатку порівняння з відомими класичними результатами. Для цього розглянемо антиплоску задачу для тіла з тріщиною, в якій нехтуються поверхневі ефекти. Остання задача має аналітичний розв'язок, наведений, наприклад, в [45].

$$\mu F'(z) = \sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \frac{-i\sigma_{yz}^{\infty} z}{\sqrt{z^2 - b^2}}.$$

Тоді при $z \to x + i \cdot 0$ на $[-b,b]$: $\mu F'(z)^{+} = \sigma_{xz}{}^{+} - i\sigma_{yz}{}^{+} = \dfrac{-i\sigma_{yz}^{\infty} x}{i\sqrt{b^2 - x^2}} = \dfrac{-\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$,

а при $z \to x - i \cdot 0$ на $[-b,b]$: $\mu F'(z)^{-} = \sigma_{xz}{}^{-} - i\sigma_{yz}{}^{-} = \dfrac{-i\sigma_{yz}^{\infty} x}{-i\sqrt{b^2 - x^2}} = \dfrac{\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$.

Тобто на $[-b,b]$: $\sigma_{xz}{}^{+} = \dfrac{-\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, $\sigma_{yz}{}^{+} = 0$, $\sigma_{xz}{}^{-} = \dfrac{\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, $\sigma_{yz}{}^{-} = 0$.

Це означає, що

$$\sigma_{xz}{}^{+} - \sigma_{xz}{}^{-} = \mu\left(F'(z)^{+} - F'(z)^{-}\right) = \mu f(x) = \frac{-2\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{b^2 - x^2}} \qquad (4.43)$$

На рис. 4.2 наведено стрибок напруження σ_{xz} в околі правої вершини тріщини при поверхневому напруженні S_e, що змінюється в діапазоні $0,001 < S_e < 0,1$, внутрішньому тиску у тріщині $\mu^s = 161.73$ $\left(Дж/м^2\right)$, поверхневому натягу $\sigma_0 = 1.3$ $\left(Дж/м^2\right)$, модулі зсуву для основного матеріалу $\mu = 168 \cdot 10^9\,(\text{Па})$ і $S = \sigma_{yz}^{\infty}/\mu = 0.1$. Крива I відповідає поверхневому напруженню $S_e = 0.1$, II – $S_e = 0.05$, III – $S_e = 0.01$, IV – $S_e = 0.005$, V – $S_e = 0.001$, а крива VI відповідає випадку відсутності поверхневих ефектів.

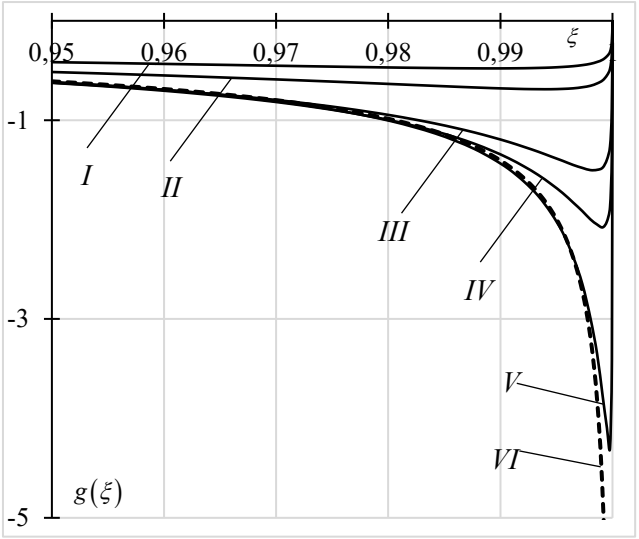


Рис. 4.2. Різниця напружень між верхнім та нижнім берегами тріщини в околі її правої вершини при $S = \sigma_{yz}^{\infty}/\mu = 0.1$ та $\sigma_{yz}^{(0)} = 0$

Слід зазначити, що параметр S_e регулюється шляхом зміни розміру тріщини. Тут і надалі розмір тріщини змінюється від 10 нм ($S_e = 0{,}1$) до 1 мкм ($S_e = 0{,}001$). З рис. 4.2 очевидно, що коли вплив поверхневого ефекту стає порівняно незначним, розв'язок стає близьким до класичного випадку, навіть біля вершини тріщини, де різниця напружень в класичному випадку є нескінченною.

Розглянемо тепер розподіл напружень біля вершин тріщини на її продовженні. Підставляючи формулу (4.27) в (4.7) отримуємо:

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{t-\bar{z}} + \frac{1}{t-z} \right) f(t)\, dt + \sigma_{yz}^{\infty}.$$

Подальші спрощення приводять до наступної формули:

$$\sigma_{yz}(x,y) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-a}^{a} \left(\frac{t-x}{(t-x)^2 + y^2} \right) f(t)\, dt + \sigma_{yz}^{\infty}, \tag{4.44}$$

яка при $y = 0$ і замінах $t = b\tau$ і $x = bs$ приводить до виразу

$$\sigma_{yz}(bs, 0) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{g(\tau)}{\tau - s}\, d\tau + \sigma_{yz}^{\infty}. \tag{4.45}$$

Результати розрахунку по формулі (4.45) представлені на рис. 4.3 і в табл. 4.1 для тих же механічних і геометричних параметрів, що і на рис. 4.2. Криві I – VI також побудовані для тих же параметрів, що і на рис. 4.2. В табл. 4.1 наведені значення напруження $\sigma_{yz}(b, 0)$ при тих же значеннях S_e, що і на рис. 4.2, і при різних рівнях точності розрахунку.

Розрахунки проводились при врахуванні різної кількості членів (N) у розкладеннях (4.34) і різної кількості вузлів (n_{Gauss}) квадратурної формули Гауса, яка використовувалась для обчислення інтегралу (4.45). Найбільш характерні результати показані в таблиці 4.1. Зокрема, у стовпчику 2 наведені результати для порівняно невеликої точності формули Гауса, у стовпчику 3 – для невеликої кількості членів у розкладеннях (4.34), а у стовпчику 4 – результати, які вже практично не змінюються при збільшенні ні N, ні n_{Gauss}.

Табл. 4.1. Значення напруження $\sigma_{yz}(bs,0)$ у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку

S_e	$N=300$ $n_{Gauss}=8$	$N=30$ $n_{Gauss}=30$	$N=300$ $n_{Gauss}=30$
0.1	0.320365	0.385986	0.508226
0.05	0.369837	0.487465	0.655736
0.01	0.428721	0.759109	1.073008
0.005	0.431797	0.868198	1.257036
0.001	0.427876	1.0327	1.542938

З наведених результатів видно, що врахування поверхневої пружності усуває сингулярність у вершинах тріщини і дозволяє отримати скінченні значення напружень у цих вершинах.

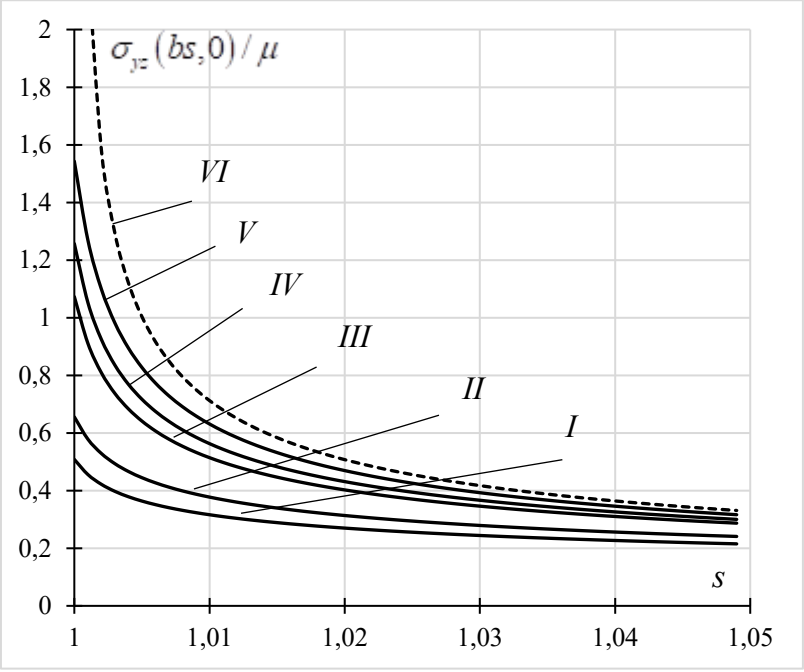


Рис. 4.3. Розподіл напружень відносно параметра поверхні S_e, для

$$S=\sigma_{yz}^{\infty}/\mu=0.1 \text{ і } \sigma_{yz}^{(0)}=0$$

Крім того, аналіз поведінки $\sigma_{yz}(bs,0)$ для s значно більших одиниці показує, що нормована величина цього напруження на віддаленні від вершини

тріщини збігаються до значення 0.1, що узгоджується з величиною прикладеного віддаленого напруження.

Залежність стрибків напружень $\sigma_{xz}^{+} - \sigma_{xz}^{-}$ між верхнім та нижнім берегами тріщини від величин рівномірного зсувного напруження $\sigma_{yz}^{(0)}$, що визначається параметром $\tilde{S}$, показано на рис. 4.4. Графіки напружень $\sigma_{yz}(bs, 0)$ побудовані для тих же механічних і геометричних параметрів, що і на рис. 4.4, показані на рис. 4.5.

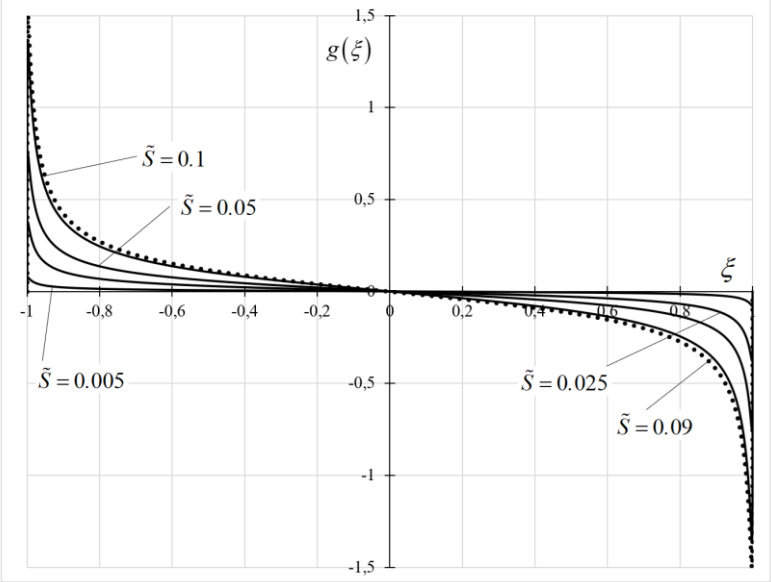


Рис. 4.4 Залежність різниці напружень $\sigma_{xz}^{+} - \sigma_{xz}^{-}$ від величин зсувного напруження на берегах тріщини

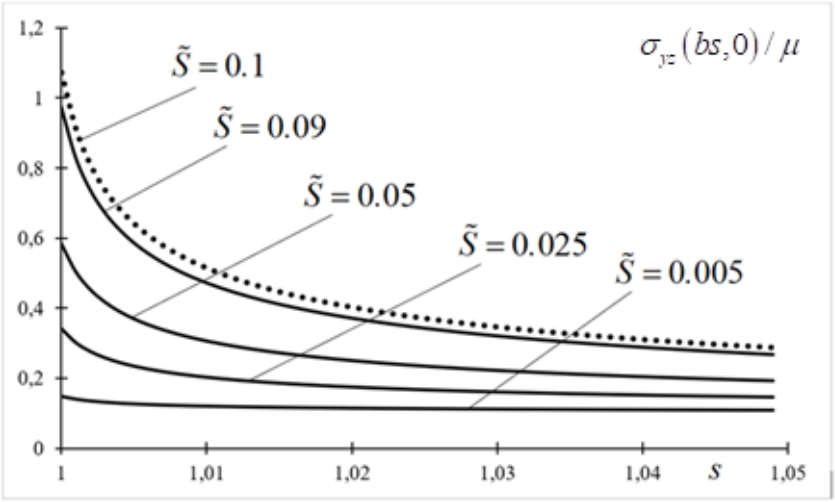


Рис. 4.5 Зміна дотичного напруження на продовженні тріщини в залежності від величин зсувного напруження на її берегах

4.2 Аналіз деформаційних полів у квазікристалах з тріщиною при врахуванні поверхневих напружень

4.2.1 Основні співвідношення для квазікристалів з урахуванням поверхневих ефектів

Поверхневі напруження у квазікристалах пов'язані з поверхневою енергією Γ, що залежить від деформації:

$$\sigma^s_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon^s_{\alpha\beta}},\ H^s_{3\alpha} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial w^s_{\alpha\beta}} \tag{4.46}$$

де $\sigma^s_{\alpha\beta}$ – поверхневий фононний тензор напружень, $H^s_{3\alpha}$ – поверхневий фазонний тензор напружень, $\varepsilon^s_{\alpha\beta}$ – поверхневий фононний тензор деформації, $w^s_{\alpha\beta}$ – поверхневий фазонний тензор деформації.

У моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока вважається, що поверхнева енергія набуває такого вигляду [114]:

$$\Gamma = \frac{1}{2} C^s_{\alpha\beta\omega\rho}\varepsilon^s_{\alpha\beta}\varepsilon^s_{\omega\rho} - \frac{1}{2} K^s_{\alpha\beta\omega\rho} w^s_{\alpha\beta} w^s_{\omega\rho} - R_{\alpha\beta\omega\rho} w^s_{\alpha\beta}\varepsilon^s_{\omega\rho}, \tag{4.47}$$

де $C^s_{\alpha\beta\omega\rho}$ – поверхневий тензор пружності, $R_{\alpha\beta\omega\rho}$ – поверхневий тензор фононно-фазонного зв'язку, $K^s_{\alpha\beta\omega\rho}$ – поверхневий фазонний модуль.

Підставивши (4.46) до (4.47) маємо такий вираз для поверхневих напружень

$$\sigma^s_{\alpha\beta} = C^s_{\alpha\beta\omega\rho}\varepsilon^s_{\omega\rho} + R_{\alpha\beta\omega\rho} w^s_{\alpha\beta},\ \ H^s_{3\alpha} = K^s_{\alpha\beta\omega\rho} w^s_{\omega\rho} + R_{\alpha\beta\omega\rho}\varepsilon^s_{\omega\rho}. \tag{4.48}$$

Умови рівноваги на поверхні для квазікристала, можна виразити як:

$$\sigma^s_{\alpha\beta,\beta} e_\alpha + \left[\sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i\right] = 0, \tag{4.49а}$$

$$k_{\alpha\beta}\sigma^s_{\alpha\beta} = \left[\sigma_{ij} n_i n_j\right], \tag{4.49б}$$

$$\left[H_{3j} n_j\right] + H^s_{3\alpha,\alpha} = 0. \tag{4.49в}$$

де $\mathbf{e}_i$ – базисні вектори; n_j – компоненти одиничної нормалі до поверхні; $k_{\alpha\beta}$ – компоненти тензора кривизни «мембрани»; $[f]$ – стрибок функції f при

переході через поверхневий шар, кома перед нижнім індексом означає диференціювання по відповідній координаті.

Формули (4.49) описують умови рівноваги на поверхні у моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока. При цьому (4.49в) аналогічна відповідній формулі [114], де розглядалась антиплоска задача для тріщини у п'єзоелектричному матеріалі. Це пояснюється тим, що фазонне поле для квазікристала грає роль, подібну до електричного поля в п'єзоелектриках.

Згідно [52] для антиплоского випадку фазон-фононний зв'язок описується за допомогою таких рівнянь:

$$\sigma_{31} = c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + R_3\frac{\partial w_3}{\partial x_1},\ \sigma_{32} = c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + R_3\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\ -\text{фононні напруження,} \qquad (4.50)$$

$$H_{31} = R_3\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_2\frac{\partial w_3}{\partial x_1},\ H_{32} = R_3\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \text{фазонні напруження,} \qquad (4.51)$$

де C_{44} – фононний зсувний модуль у гексагональних квазікристалах, R_3 – коефіцієнт фонон-фазонного зв'язку, K_2 – фазонний пружний модуль, $w_{31} = \frac{\partial w_3}{\partial x_1}$, $w_{32} = \frac{\partial w_3}{\partial x_2}$ – фазонні деформації, w_3 – фазонне переміщення.

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0. \qquad (4.52)$$

Розглянемо антиплоску деформацію квазікристалу з квазіперіодичною віссю вздовж осі x_3, загальний розв'язок якої задається як:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\left[\mathbf{h}(z)\right] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} h_1(z) \\ h_2(z) \end{bmatrix}, \qquad (4.53)$$

де $\mathbf{h}(z)$ – двовимірна кусково-аналітична вектор-функція комплексної змінної, $z = x_1 + ix_2$. На основі (4.50), (4.51) вирази для напружень можна записати так:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{32}+i\sigma_{31} \\ H_{32}+iH_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{Ch}'(z) = \mathbf{C}\begin{bmatrix} h_1'(z) \\ h_2'(z) \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 \\ R_3 & K_2 \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

В розгорнутому вигляді ці рівняння такі:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{32}+i\sigma_{31} \\ H_{32}+iH_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 \\ R_3 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1'(z) \\ h_2'(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44}h_1'(z)+R_3h_2'(z) \\ R_3h_1'(z)+K_2h_2'(z) \end{bmatrix}.$$

З рівнянь (4.54) отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{32} &= c_{44}\,\mathrm{Re}\,h_1'(z)+R_3\,\mathrm{Re}\,h_2'(z), \\ H_{32} &= R_3\,\mathrm{Re}\,h_1'(z)+K_2\,\mathrm{Re}\,h_2'(z). \end{aligned} \tag{4.55}$$

4.2.2 Побудова розв'язку для взаємопов'язаних фононних та фазонних полів

Розглянемо антиплоску зсувну деформацію квазікристалу, що містить тріщину $-b \le x_1 \le b,\ x_2 = 0$, що піддається дії віддалених рівномірних антиплоских навантажень ($\sigma_{31}^{\infty},\ \sigma_{32}^{\infty},\ H_{31}^{\infty},\ H_{32}^{\infty}$). Поверхні тріщини вільні від навантаження, тобто $\sigma_{32} = H_{32} = 0$ на $-b \le x_1 \le b,\ x_2 = \pm 0$. Нехай верхній та нижній береги тріщини позначені як сторони «+» та «-» тріщини відповідно.

Для когерентного інтерфейсу (стрибки деформацій нульові) умови на берегах:

$$\begin{aligned} &H_{31,1}^{s}+\left(H_{32}^{+}\right)-\left(H_{32}^{-}\right)=0, \\ &\sigma_{13,1}^{s}+\left(\sigma_{23}^{+}\right)-\left(\sigma_{23}^{-}\right)=0 \quad \text{на верхньому березі}, \\ &H_{31,1}^{s}+\left(H_{32}^{+}\right)-\left(H_{32}^{-}\right)=0, \\ &\sigma_{13,1}^{s}+\left(\sigma_{23}^{+}\right)-\left(\sigma_{23}^{-}\right)=0 \quad \text{на нижньому березі}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Приймаючи, що $\varepsilon_{\alpha\beta}^{s} = \varepsilon_{\alpha\beta}$, $w_{31}^{s} = w_{31}$, та застосовуючи (4.48) маємо

$$\begin{aligned} H_{13}^{s} &= R_3^{s}u_{3,1}+K_2^{s}w_{3,1}, \\ \sigma_{13}^{s} &= C_{44}^{s}u_{3,1}+R_3^{s}w_{3,1}. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що поверхневі умови на верхньому та нижньому березі тріщини не залежать один від одного і застосовуючи (4.56), маємо такі вирази для поверхневих умов на берегах тріщини

$$
\begin{aligned}
&H_{23}^{+} = -R_3^s u_{3,11} - K_2^s w_{3,11},\\
&\sigma_{23}^{+} = -C_{44}^s u_{3,11} + R_3^s w_{3,11} \quad \text{на верхньому березі,}\\
&H_{23}^{-} = R_3^s u_{3,11} + K_2^s w_{3,11},\\
&\sigma_{23}^{-} = C_{44}^s u_{3,11} - R_3^s w_{3,11} \quad \text{на нижньому березі.}
\end{aligned}
$$

Вищезазначені граничні умови можна еквівалентно виразити в такій матричній формі:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \sigma_{23}^{+} \\ H_{23}^{+} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{23}^{-} \\ H_{23}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^s & R_3^s \\ R_3^s & K_2^s \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} u_{3,11}^{+} \\ w_{3,11}^{+} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{3,11}^{-} \\ w_{3,11}^{-} \end{bmatrix} \right],\\
&\begin{bmatrix} \sigma_{23}^{+} \\ H_{23}^{+} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{23}^{-} \\ H_{23}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^s & R_3^s \\ R_3^s & K_2^s \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} u_{3,11}^{+} \\ w_{3,11}^{+} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{3,11}^{-} \\ w_{3,11}^{-} \end{bmatrix} \right].
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Враховуючи розподіл гвинтових дислокацій з густиною $b_1(x_1)$ та QC-дислокацій з густиною $b_2(x_1)$ для $-b \le x_1 \le b$, а також віддалене навантаження (σ_{31}^{∞}, σ_{32}^{∞}, H_{31}^{∞}, H_{32}^{∞}), вектор-функцію $\mathbf{h}(z)$ можна представити з урахуванням рівняння (4.52) як:

$$
\mathbf{h}(z) = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \int_{-b}^{b} b_1(\xi) \ln(z-\xi) d\xi \\ \int_{-b}^{b} b_2(\xi) \ln(z-\xi) d\xi \end{bmatrix} + \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{32}^{\infty} + i\sigma_{31}^{\infty} \\ H_{32}^{\infty} + iH_{31}^{\infty} \end{bmatrix} z .
$$

Тоді маючи на увазі, що $z = x_1 + ix_2$, отримаємо для верхнього та нижнього берегів тріщини:

$$\mathbf{h}'_{+}(x_1)=\begin{bmatrix} -\dfrac{i}{2}b_1(x_1)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-b}^{b}\dfrac{b_1(\xi)}{x_1-\xi}d\xi \\ -\dfrac{i}{2}b_2(x_1)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-b}^{b}\dfrac{b_2(\xi)}{x_1-\xi}d\xi \end{bmatrix}+\mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix} \sigma_{32}^{\infty}+i\sigma_{31}^{\infty} \\ H_{32}^{\infty}+iH_{31}^{\infty} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}'_{-}(x_1)=\begin{bmatrix} \dfrac{i}{2}b_1(x_1)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-b}^{b}\dfrac{b_1(\xi)}{x_1-\xi}d\xi \\ \dfrac{i}{2}b_2(x_1)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-b}^{b}\dfrac{b_2(\xi)}{x_1-\xi}d\xi \end{bmatrix}+\mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix} \sigma_{32}^{\infty}+i\sigma_{31}^{\infty} \\ H_{32}^{\infty}+iH_{31}^{\infty} \end{bmatrix}. \qquad (4.58)$$

На основі (4.58) знайдемо стрибок вектор-функції $\mathbf{h}(z)$ при переході через тріщину:

$$\mathbf{h}'_{+}(x_1)-\mathbf{h}'_{-}(x_1)=\begin{bmatrix} -ib_1(x_1) \\ -ib_2(x_1) \end{bmatrix}.$$

Тоді враховуючи, що на основі (4.53):

$$\begin{bmatrix} u'_3 \\ w'_3 \end{bmatrix}=\mathrm{Im}\left[\mathbf{h}'(z)\right],$$

отримаємо $\mathrm{Im}\left[\mathbf{h}'_{+}(x_1)-\mathbf{h}'_{+}(x_1)\right]=\begin{bmatrix} u'_{3+}-u'_{3-} \\ w'_{3+}-w'_{3-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -b_1(x_1) \\ -b_2(x_1) \end{bmatrix}.$

Звідки витікають такі вирази для різниці переміщень берегів тріщини:

$$u_3^{+}-u_3^{-}=-\int_{-a}^{x_1}b_1(\xi)d\xi \ \text{ та } \ w_3^{+}-w_3^{-}=-\int_{-a}^{x_1}b_2(\xi)d\xi. \qquad (4.59)$$

Далі підставляючи вирази (4.58) в (4.55) і використовуючи (4.57), маємо:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{C_{44}b_1(\xi)+R_3b_2(\xi)}{x_1-\xi}d\xi+2\sigma_{32}^{\infty}=C_{44}^{s}(u_{3,11}^{+}-u_{3,11}^{-})+R_3^{s}(w_{3,11}^{+}-w_{3,11}^{-}),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{R_3b_1(\xi)+K_2b_2(\xi)}{x_1-\xi}d\xi+2\,\mathrm{H}_{32}^{\infty}=R_3^{s}(u_{3,11}^{+}-u_{3,11}^{-})+K_2^{s}(w_{3,11}^{+}-w_{3,11}^{-}).$$

З урахуванням (4.59) отримуємо таку систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{C_{44}b_1(\xi)+R_3b_2(\xi)}{x_1-\xi}d\xi-2\sigma_{32}^{\infty}=C_{44}^{s}b'_1(x_1)+R_3^{s}b'_2(x_1),$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{R_3b_1(\xi)+K_2b_2(\xi)}{x_1-\xi}d\xi-2\,\mathrm{H}_{32}^{\infty}=R_3^{s}b'_1(x_1)+K_2^{s}b'_2(x_1).$$

Додаткові умовами для цієї системи мають вигляд

$$\int_{-b}^{b} b_1(\xi)d\xi = 0, \quad \int_{-b}^{b} b_2(\xi)d\xi = 0.$$

4.2.3 Чисельна реалізація розрахунку

Переходячи за допомогою заміни $x = x_1 / b$ до проміжку $[-1;1]$, одержуємо:

$$\int_{-1}^{1} \frac{C_{44}b_1(t) + R_3 b_2(t)}{t-x}dt + \pi\frac{C_{44}^s b_1'(x)}{b} + \pi\frac{R_3^s b_2'(x)}{b} = -2\pi\sigma_{32}^{\infty},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{R_3 b_1(t) + K_2 b_2(t)}{t-x}dt + \pi\frac{R_3^s b_1'(x)}{b} + \pi\frac{K_2^s b_2'(x)}{b} = -2\pi H_{32}^{\infty}.$$

Застосуємо для приведення рівнянь до більш зручного вигляду оператор, що витікає із розв'язків характеристичного СІР з ядром типу Коші в різних класах функцій [34]:

$$T_{2nd}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\psi(t)dt - \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\psi(t)}{(t-x)}dt.$$

В результаті отримуємо

$$C_{44}b_1(x) + R_3 b_2(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}(C_{44}b_1(t) + R_3 b_2(t))dt -$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,(C_{44}^s b_1'(x)/b + R_3^s b_2'(x)/b + 2\sigma_{32}^{\infty})}{t-x}dt, \qquad (4.60)$$

$$R_3 b_1(x) + K_2 b_2(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}(R_3 b_1(t) + K_2 b_2(t))dt -$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,(R_3^s b_1'(x)/b + K_2^s b_2'(x)/b + 2H_{32}^{\infty})}{t-x}dt.$$

Тоді, використовуючи умови однозначності переміщень берегів тріщини

$$\int_{-1}^{1} b_1(t) = \int_{-1}^{1} b_2(t) = 0 \qquad (4.61)$$

і помноживши обидві частини (4.60) на $\sqrt{1-x^2}$, матимемо такі вирази:

$$\sqrt{1-x^2}\,(C_{44}b_1(x)+R_3b_2(x)) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,(C_{44}^s b_1'(x)/b + R_3^s b_2'(x)/b + 2\sigma_{32}^{\infty})}{t-x}dt,$$

$$\sqrt{1-x^2}\,(R_3b_1(x)+K_2b_2(x)) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,(R_3^s b_1'(x)/b + K_2^s b_2'(x)/b + 2H_{32}^{\infty})}{t-x}dt. \quad (4.62)$$

Будемо розшукувати $b_i(x)$ у вигляді:

$$b_i(x) = \sum_{m=0}^{N} c_{mi}T_m(x),\ i=1,2\,, \quad (4.63)$$

де $T_m(x)$ представляє собою поліном Чебишева m-го порядку першого роду.

Вибираючи точки колокації $x_i = -\cos(\frac{i\pi}{N}), i=1,2,...,N$ і враховуючи, що $T_m(x_i) = (-1)^m\cos(\frac{mi\pi}{N})$, систему (4.62) запишемо у вигляді

$$\sum_{m=0}^{N}\left[(-1)^m\cos(\frac{mi\pi}{N})\sqrt{1-(\cos(\frac{i\pi}{N}))^2}\left[C_{44}c_{m1}+R_3c_{m2}\right]\right]+$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\left[(-1)^m\frac{m}{b}\cos(\frac{mi\pi}{N})(C_{44}^s c_{m1}+R_3^s c_{m2})\right] = -2\sigma_{32}^{\infty}\cos(\frac{i\pi}{N}),$$

$$\sum_{m=0}^{N}\left[(-1)^m\cos(\frac{mi\pi}{N})\sqrt{1-(\cos(\frac{i\pi}{N}))^2}\left[R_3c_{m1}+K_2c_{m2}\right]\right]+ \quad (4.64)$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\left[(-1)^m\frac{m}{b}\cos(\frac{mi\pi}{N})(R_3^s c_{m1}+K_2^s c_{m2})\right] = -2H_{32}^{\infty}\cos(\frac{i\pi}{N}).$$

Із додаткових умов (4.61) отримуємо іще два рівняння

$$\sum_{m=0,\ m\neq 1}^{N}\left[\frac{1+(-1)^m}{1-m^2}c_{m1}\right] = 0,\quad \sum_{m=0,\ m\neq 1}^{N}\left[\frac{1+(-1)^m}{1-m^2}c_{m2}\right] = 0\,. \quad (4.65)$$

Співвідношення (4.64) і (4.65) складають систему 2N лінійних алгебраїчних рівнянь з 2N невідомими c_{m1}, c_{m2}. Її розв'язок знаходиться методом Гауса.

Розкриття тріщини будемо знаходити з рівнянь (4.59):

$$\Delta u_3 = u_3^+ - u_3^- \text{ та } \Delta w_3 = w_3^+ - w_3^-. \quad (4.66)$$

Напруження на продовженні тріщини будемо розшукувати на основі (4.55). В результаті маємо

$$H_{32} = R_3 \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} \frac{b_1(\xi)}{x_1-\xi} d\xi + K_2 \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} \frac{b_2(\xi)}{x_1-\xi} d\xi + H_{32}^{\infty}, \tag{4.67}$$

$$\sigma_{32} = C_{44} \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} \frac{b_1(\xi)}{x_1-\xi} d\xi + R_3 \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} \frac{b_2(\xi)}{x_1-\xi} d\xi + \sigma_{32}^{\infty}.$$

Для обчислення інтегралів в (4.67) використовуємо методику, що виражена формулами (3.38), (3.39).

4.2.4 Аналіз результатів для нанотріщин в квазікристалах

Розглянемо одновимірний гексагональниий квазікристал з такими матеріальними константами:

$C_{44} = 50 \cdot 10^9 \, Н/м^2, R_3 = 1,2 \cdot 10^9 \, Н/м^2, K_2 = 0,3 \cdot 10^9 \, Н/м^2$.

Поверхневі константи виберемо такими [35]:

$C_{44}^S = 62,5 \, Н/м, \; R_3^S = 1,5 \, Н/м, \; K_2^S = 1,5 \, Н/м$.

Віддалені фононні та фазонні навантаження приймемо рівними: $\sigma_{yz}^{\infty} = 8 \, МПа, \; H_{yz}^{\infty} = 0$.

В табл. 4.2 та на рис. 4.6 наведено залежність напруження у вершині та на продовженні тріщини від її розміру, який задавався в межах від 10 нм до 200 нм. Зокрема, в табл. 4.2 наведені значення напруження $\sigma_{yz}(bx,0)$ та $H_{yz}(bx,0)$ у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку. Аналіз показав, що при поступовому збільшенні кількості членів (N) у розкладеннях (4.63) при сталому значенні $n_{Gauss} = 30$ спостерігається стабілізація результатів по досягненню значення кількості членів $N = 1000$. Подальше збільшення N показує, що результати вже практично не змінюються. Результати, наведені на наступних графіках, отримані при $n_{Gauss} = 30$ і $N = 1000$.

На рис. 4.6 та 4.7 лінія I відповідає $b = 10 \, нм$, лінія II – $b = 20 \, нм$, лінія III – $b = 100 \, нм$, лінія IV – $b = 200 \, нм$.

Таблиця 4.2а

Значення напруження σ_{yz}, 10^9, $Па$ у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку

b, нм	$N=300$	$N=500$	$N=600$	$N=700$	$N=900$	$N=1000$
10	1,09485	1,00831	1,08147	1,09159	1,05493	1,05155
20	1,18043	1,06936	1,03597	1,05143	1,11989	1,11462
100	1,12339	1,18900	1,19893	1,19798	1,15502	1,15922
200	1,12155	1,18588	1,20372	1,21534	1,22384	1,22223

Таблиця 4.2б

Значення напруження H_{yz}, 10^7, $Па$ у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку

b, нм	$N=300$	$N=500$	$N=600$	$N=700$	$N=900$	$N=1000$
10	2,66207	2,45452	2,63002	2,65431	2,47037	2,55729
20	2,92594	2,65968	2,57961	2,61669	2,78092	2,76826
100	3,26274	3,41934	3,44310	3,44083	3,34586	3,34801
200	3,85164	4,00436	4,04686	4,07460	4,09492	4,09107

З табл. 4.2 можна побачити, що врахування поверхневої пружності усуває сингулярність у вершинах нано-тріщини і дозволяє отримати скінченні значення напружень у цих вершинах.

Аналіз поведінки $\sigma_{yz}(bx,0)$ для x значно більших одиниці показує, що величини цього напруження на віддаленні від вершини тріщини збігаються до значення прикладеного віддаленого напруження. З рис. 4.7 видно, що напруження у вершині тріщини і в деякому околі від її вершини зі збільшенням розміру тріщини зростає. На відміну від класичної моделі тріщини, напруження не прямують до нескінченності, а залишаються скінченними. Це є прямим

наслідком урахування поверхневої пружності, яка «згладжує» сингулярність і відіграє роль додаткового механізму жорсткості на наномасштабі.

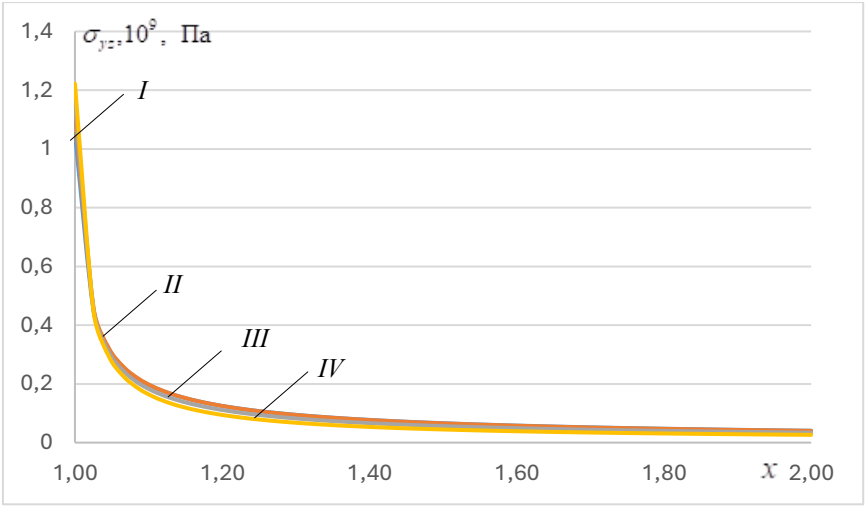


Рис. 4.6 Розподіл напружень $\sigma_{yz}(bx,0)$ для різних значень довжини тріщини

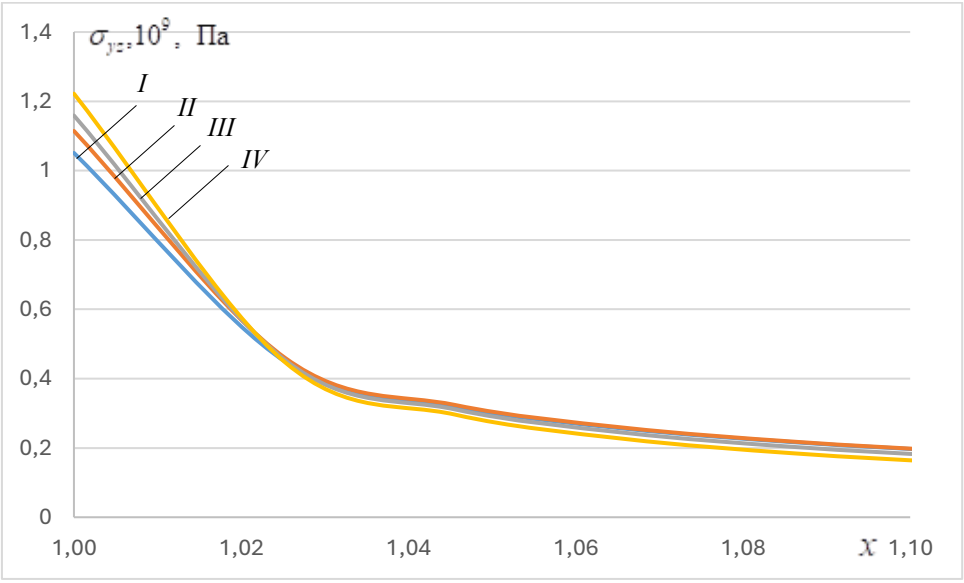


Рис. 4.7 Розподіл напружень $\sigma_{yz}(bx,0)$ в околі вершини тріщини для різних значень її довжини

Рис. 4.8, побудований при тих же значеннях вхідних параметрів, що і рис. 4.6, показує, що зміна розмірів тріщини несуттєво впливає на її нормоване розкриття.

Крива I відповідає $b=10$ *нм*, II – $b=200$ *нм*.

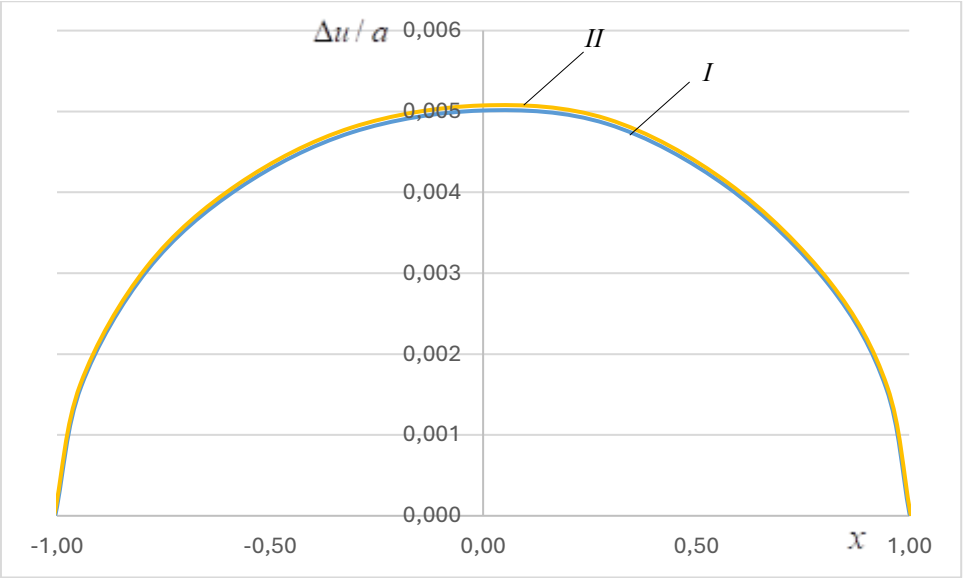


Рис. 4.8 Залежність розкриття тріщини від зміни її розмірів

Із ростом довжини тріщини роль поверхневих ефектів зменшується, і поведінка розкриття поступово наближається до класичної, характерної для макроскопічної механіки руйнування.

4.3 Висновки до четвертого розділу

Досліджено вплив поверхневої пружності на антиплоску задачу для тріщини типу III у лінійно пружному твердому тілі, що знаходиться під дією віддалених зсувних напружень та навантажень на поверхні тріщини. Поверхневі ефекти враховані за допомогою континуальної моделі Гуртина і Мердока. За допомогою методів комплексної змінної проблема зведена до сингулярного інтегро-диференціального рівняння Коші першого порядку. Розв'язок цього рівняння побудований шляхом його представлення у вигляді розкладення по многочленам Чебишева і використання методу колокації. На основі цього розв'язку знайдені напруження в околі тріщини при різних її довжинах. Встановлено, що на відміну від класичного розв'язку лінійної механіки руйнування напруження у вершині тріщини залишаються скінченними. Вплив поверхневої пружності стає особливо очевидним, коли довжина тріщини є меншою мікрометра і посилюється з подальшим зменшенням цієї довжини.

Також досліджено антиплоску зсувну деформацію лінійного квазікристала з ізольованою тріщиною за умов дії віддалених рівномірних антиплоских напружень з урахуванням фононно-фазонного зв’язку та поверхневих ефектів за моделлю Гуртина–Мердока. Врахування поверхневої пружності змінює сингулярну поведінку полів біля вершин тріщини: класична коренева сингулярність усувається, а напруження та деформації набувають скінченних значень. Для нанорозмірних тріщин поверхневі ефекти стають домінуючими, вони суттєво впливають на розподіл напружень, деформацій і особливо на розкриття берегів тріщини, посилюючи розмірну залежність розв’язку.

Чисельний аналіз продемонстрував хорошу збіжність результатів і показав, що зі збільшенням довжини тріщини зростають значення напружень у вершині та в її близькому околі. Виявлено також, що довжина тріщини на нано-рівні несуттєво впливає на її нормоване розкриття, а поверхневі ефекти найбільш виражені саме для нано-тріщин.

Отримані результати підкреслюють необхідність врахування поверхневої пружності та фазонного поля при моделюванні механічної поведінки квазікристалів на нано- та субмікронному масштабах, особливо в задачах руйнування та оцінки тріщиностійкості.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі виконано дослідження задач механіки руйнування та моделювання напружено-деформованого стану матеріалів з мікро- та нанотріщинами і отримано такі результати:

1. Досліджено плоску задачу для мікротріщини вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки:

а) побудовано точний аналітичний метод розв'язання задачі плоскої деформації для відкритої мікротріщини під дією внутрішнього тиску та зосереджених сил, що базується на інтегральних перетвореннях Фур’є;

б) зведено крайову задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь та проведено її чисельний розв'язок за допомогою квадратур Гауса-Чебишева;

в) виявлено ефект розмірної залежності та геометричного чинника, який полягає у різкому зростанні розкриття берегів тріщини та швидкості звільнення енергії при зменшенні товщини накладки нижче певного критичного значення.

2. Проаналізовано особливості деформування системи «тонка полоса – накладка» з міжфазною мікротріщиною на межі їх з’єднання:

а) сформульовано та розв'язано плоску задачу для тріщини, розташованої на межі з'єднання двох ізотропних лінійно пружних нескінченних шарів за умови жорсткого закріплення нижнього шару;

б) розроблено математичний апарат на основі перетворень Фур'є для зведення проблеми до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Проведено чисельний розв'язок цієї системи за допомогою методу колокації та квадратур Гауса-Чебишева;

в) проведено верифікацію аналітичного розв’язку шляхом порівняння з чисельним моделюванням методом скінченних елементів, що підтвердило високу точність та хорошу збіжність результатів;

г) встановлено, що геометричні параметри верхньої тонкої накладки суттєво регулюють напружений стан і швидкість звільнення енергії в околі вершин тріщини.

3. Виконано моделювання плоскої задачі для міжфазної тріщини на межі розділу двох ізотропних матеріалів з урахуванням поверхневих ефектів:

а) у рамках моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока враховано вплив тонкого поверхневого шару («мембрани») з власними пружними константами на берегах міжфазної тріщини;

б) реалізовано методику побудови системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, яка базується на розподілі лінійних дислокацій та лінійних сил уздовж дефекту;

в) при різних об’ємних та поверхневих характеристиках матеріалів побудовано чисельні розв’язки цієї системи, зокрема вперше враховано різні механічні характеристики поверхневих шарів на нижньому і верхньому берегах тріщини

г) показано, що для тріщин нанометрового діапазону поверхневі напруження відіграють домінуючу роль, радикально змінюючи концентрацію напружень біля вершини тріщини, тоді як для тріщин розміром понад 20 мкм розв'язок наближається до класичного.

4. Досліджено антиплоску деформацію лінійно пружного ізотропного тіла з нанотріщиною типу III під дією віддалених зсувних напружень з урахуванням поверхневих ефектів:

а) сформульовано задачу в рамках моделі Гуртина-Мердока, де береги нанотріщини розглянуто як пружні мембрани з власними константами, та за допомогою методів комплексної змінної зведено проблему до сингулярного інтегро-диференціального рівняння першого порядку типу Коші;

б) реалізовано чисельний алгоритм на основі розкладання шуканої функції за ортогональними многочленами Чебишева та застосування методу колокації;

в) побудовано чисельні розв'язки, за допомогою яких, як і в плоскому випадку, отримані скінченні значення напружень у вершині тріщини;

г) виявлено ефект розмірної залежності, який полягає в тому, що для тріщин менше мікрометра вплив поверхневої пружності є домінуючим і суттєво обмежує концентрацію напружень, тоді як із збільшенням довжини дефекту понад 1 мкм розв'язок асимптотично наближається до класичного.

5. Проаналізовано антиплоску деформацію одновимірного гексагонального квазікристала з ізольованою нанотріщиною:

а) сформульовано та розв'язано задачу про антиплоский зсув із спільним урахуванням фононно-фазонного зв’язку та поверхневих напружень за моделлю Гуртина–Мердока, де проблему зведено до системи взаємопов'язаних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь;

б) із застосуванням операторів переходу до характеристичних рівнянь зроблено розділення фононних та фазонних складових, а чисельний аналіз реалізовано за допомогою поліномів Чебишева першого роду;

в) побудовано чисельні залежності, які підтвердили, що врахування поверхневої пружності для різних властивостей поверхневих шарів усуває сингулярність як фононних, так і фазонних напружень, забезпечуючи їхні скінченні значення у вершині нанотріщини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Грилицкий Д. В. Об упругом равновесии неоднородной пластинки с разрезами. Прикладная механика. 1966. 2, №5. С. 12–18.

2. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1990. 286 с. (Неклассические проблемы механики разрушения: в 4 т. / под ред. А. Н. Гузя; т. 2).

3. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел. Киев: Наук. думка, 1980. 159 с.

4. Каминский А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1990. 312 с. (Неклассические проблемы механики разрушения: в 3 т. / под ред. А. Н. Гузя; т. 1).

5. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред. Прикладная механика. 1999. Т. 35, № 4. С. 63–68.

6. Кит Г. С., Побережный О. В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. Киев: Наукова думка, 1992. 216 с.

7. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1989. 282 с.

8. Клєцков О. М., Лобода В. В. Аналітичний та чисельний аналіз мікротріщини вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки. Computer Science and Applied Mathematics. 2024. № 2. С. 5–12. URL: https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-2-01

9. Клєцков О. М., Лобода В. В. Аналітичний та чисельний аналіз мікротріщини вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки. Математичні проблеми технічної механіки – 2024: матеріали Міжнар. наук. конф. (18–19 квітня 2024 р., м. Дніпро). Дніпро : ДНУ, 2024. Ч. 1. С. 89–90.

10. Клєцков О. М., Лобода В. В. Аналіз антиплоскої деформації квазікристала з тріщиною з урахуванням поверхневих ефектів. Технічна механіка. 2026. № 1. С. 62–72. URL: https://doi.org/10.15407/itm2026.01.062

11. Клєцков О. М., Лобода В. В. Вплив поверхневих ефектів на антиплоску деформацію квазікристалу з тріщиною. Математичні проблеми технічної механіки – 2026: матеріали Міжнар. наук. конф. (19–20 лютого 2026 р., м. Дніпро). Дніпро: ДНУ, 2026. Ч. 1. С. 43.

12. Клєцков О. М., Лобода В. В. Міжфазна тріщина між двома ізотропними матеріалами з урахуванням поверхневих ефектів. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2025. Вип. 40. С. 86–103. URL: https://doi.org/10.15401/4225216

13. Клєцков О. М., Шевельова А. Є., Лобода В. В. Вплив поверхневої пружності на нанотріщину в ізотропному матеріалі. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2025): тези доп. XXIII Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Дніпро, 19–21 листопада 2025 р.). Дніпро : ДНУ, 2025. С. 168.

14. Клєцков О. М., Шевельова А. Є., Лобода В. В. Ефект поверхневої пружності при аналізі нанотріщини в антиплоскому полі навантажень. Системні технології. 2026. Вип. 1 (162). С. 177–190. URL: https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-162-2026-19

15. Лобода В. В. О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов. Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск, 1991. С. 78–86.

16. Острик В. І. Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву. Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2003. Т. 39, № 2. С. 58–65.

17. Острик В. И., Улитко А. Ф. Контактная задача для межфазной полубесконечной трещины. Мат. методи та фізико-механічні поля. 2001. Т. 44, № 3. С. 88–95.

18. Острик В. І., Улітко А. Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. Т. 43, № 2. С. 119–126.

19. Павленко А. В., Кагадий Т. С. Решение контактной задачи для ортотропной полуполосы с учетом трения. Теоретическая и прикладная механика. 2003. Вып. 37. С. 85–90.

20. Павленко А. В., Кагадий Т. С., Щербина И. В. Решение задача Галина для ортотропного прямоугольника. Математичні проблеми технічної механіки. Дніпропетровськ, 2005. С. 34.

21. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.

22. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.

23. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейнодеформируемого основания. К.; Одесса: Вища шк., 1982. 167 с.

24. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 467 с.

25. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.

26. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами. Физ.-хим. мех. материалов. 1972. Т. 8, № 11. С. 58–65.

27. Улітко А. Ф., Острик В. І. Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів. Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. 2002. Вип. 2. С. 133–141.

28. Фильштинский Л. А. Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах. Сумы: СГУ, 2001. 238 с.

29. Antipov Y. A., Schiavone P. Integro-Differential Equation for a Finite Crack in a Strip with Surface Effects. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2011. Volume 64, Issue 1. P. 87–106. URL: https://doi.org/10.1093/qjmam/hbq027

30. Aravas N., McMeeking R. M. Finite element analysis of void growth near a blunting crack tip. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1985. Vol. 33, No. 1. P. 25–49. URL: https://doi.org/10.1016/0022-5096(85)90020-1

31. Atkinson C. On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics. International Journal of Fracture. 1977. Vol. 13. P. 807–820.

32. Atkinson C. The interface crack with a contact zone (an analytical treatment). International Journal of Fracture. 1982. Vol. 18. P. 161–177.

33. Birinci A., Birinci F., Cakiroglu F. L., Erdol R. An internal crack problem for an infinite elastic layer. Archive of Applied Mechanics. 2010. Vol. 80. P. 997–1005. URL: https://doi.org/10.1007/s00419-009-0355-5

34. Chakrabarti A., Hamsapriye. Numerical solution of a singular integro-differential equation. ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. Vol. 79, No. 4. P. 233–241.

35. Chen T. Exact size-dependent connections between effective moduli of fibrous piezoelectric nanocomposites with interface effects. Acta Mechanica. 2008. V. 196, No. 3-4. P. 205–217.

36. Cheng Z., Zhong Z. Analysis of a moving crack in a functionally graded strip between two homogeneous layers. International Journal of Mechanical Sciences. 2007. Vol. 49, No. 9. P. 1038–1046.

37. Cherepanov G.P. Mechanics of Brittle Fracture. New York: McGraw-Hill International Book Co. 1979. 939 p.

38. Comninou, M., 1977. The interface crack. Journal of Applied Mechanics, 44, 631–636.

39. Comninou M., Dundurs J. Partial closure of cracks at the interface between a layer and a half-space. Engineering Fracture Mechanics. 1983. Vol. 18. P. 315–323.

40. Dai S., Gharbi M., Sharma P., Park H. S. Surface piezoelectricity: size effects in nanostructures and the emergence of piezoelectricity in non-pieelectric materials. Journal of Applied Physics. 2011. V. 110. P. 104305.

41. Dang H. Y., Luo K., Zhao M. H., Lu C., Chen Z. T., Fan C. Y. Axisymmetric thermoelastic interfacial analysis of a partially debonded two-dimensional hexagonal quasicrystal film with surface effects. Thin-Walled Structures. 2026. Vol. 228, part B. Art. 115148.

42. Delale F., Erdogan F. Bonded orthotropic strips with cracks. International Journal of Fracture. 1979. Vol. 15. P. 343–364. URL: https://doi.org/10.1007/BF00033060

43. Delale F., Erdogan F. Interface crack in a nonhomogeneous elastic medium. International Journal of Engineering Science. 1988. Vol. 26, No. 6. P. 559–568.

44. Delale F., Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. Journal of Applied Mechanics. 1983. Vol. 50. P. 609–614.

45. England A. H. Complex Variable Methods in Elasticity. London: Wiley, 1971. 197 p.

46. Enrico R., Paolo M. M. Stationary straight cracks in quasicrystals. International Journal of Fracture. 2010. № 166 (1). P. 105–120.

47. Erdogan F. The Crack Problem for Bonded Nonhomogeneous Materials Under Antiplane Shear Loading. ASME Journal of Applied Mechanics. 1985. Vol. 52, No. 4. P. 823–828. URL: https://doi.org/10.1115/1.3169153

48. Erdogan F., Gupta G. D. Layered composites with an interface flaw. International Journal of Solids and Structures. 1971. Vol. 7. P. 1089–1107.

49. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations. Mechanics of Fracture / ed. by G. C. Sih. Leyden: Noordhoff International Publication, 1973. P. 368–425.

50. Eshelby, J.D., Read, W.T., Shockley, W., 1953. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory. Acta Metallurgica, 1, 251-259. https://doi.org/10.1016/0001-6160(53)90099-6.

51. Fan C. Y., Li Y., Xu G. T., Zhao M. H. Fundamental solutions and analysis of three-dimensional cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. Mechanics Research Communications. 2016. Vol. 74. P. 39–44.

52. Fan T. Y. Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications. Beijing: Science Press, 2011. 363 p.

53. Gao Y., Ricoeur A., Zhang L. L. Plane problems of cubic quasicrystal media with an elliptic hole or a crack. Physics Letters A. 2011. Vol. 375 (28). P. 2775–2781. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.06.003

54. Gautesen A. K. The interface crack under a combined loading. ASME Journal of Applied Mechanics. 1988. Vol. 55. P. 580–586.

55. Gautesen A. K. The interface crack under combined loading. International Journal of Fracture. 1993. Vol. 60. P. 349–361.

56. Gautesen A. K. The interface crack in a tension field. Journal of Applied Mechanics. 1987. Vol. 54. P. 93–98.

57. Gautesen A. K. The interface crack in a tension field: an eigenvalue problem for the gap. International Journal of Fracture. 1992. Vol. 55. P. 261–271.

58. Govorukha V., Kamlah M. Interface crack with mixed electric boundary conditions in quasicrystals. Archive of Applied Mechanics. 2024. Vol. 94. P. 589–607.

59. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1975. Vol. 57, No. 4. P. 291–323. URL: https://doi.org/10.1007/BF00261375

60. Gurtin M. E., Weissmuller J., Larche F. A General Theory of Curved Deformable Interface in Solids at Equilibrium. Philosophical Magazine A. 1998. Vol. 78, No. 5. P. 1093–1109.

61. Herrmann K. P. On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial / K. P Herrmann, V. V. Loboda, V. B. Govorukha // Int. J. Fracture. 2001. Vol. 111. P. 203–227

62. Hu K. Q., Gao C.-F., Zhong Z., Chen Z. T. Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2021. Vol. 101, No. 11. URL: https://doi.org/10.1002/zamm.202000360

63. Hu K. Q., Jin H., Yang Z., Chen X. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. Acta Mechanica. 2019. No. 230. P. 2455–2474.

64. Hu Z., Zhang X., Li X.-F. Oscillatory singularity for bending of a partially clamped nanoplate with consideration of surface effect. Engineering Fracture Mechanics. 2023. Vol. 290. P. 109495.

65. Hu Z.-L., Lee K. Y., Li X.-F. Crack in an elastic thin-film with surface effect. International Journal of Engineering Science. 2018. Vol. 123. P. 158–173.

66. Huang G. Y., Yu S. W. Effect of surface piezoelectricity on the electromechanical behaviour of a piezoelectric ring. Physica Status Solidi B. 2006. V. 243. P. R22–R24.

67. Hwu C. Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks. Engineering Fracture Mechanics. 1993. Vol. 45. P. 89–97.

68. Kim C. I., Schiavone P., Ru C.-Q. Analysis of plane-strain crack problems (mode I and mode II) in the presence of surface elasticity. Journal of Elasticity. 2011. Vol. 104. P. 397–420.

69. Kim C. I., Schiavone P., Ru C.-Q. Effect of surface elasticity on an interface crack in plane deformations. Proceedings of the Royal Society A. 2011. Vol. 467, No. 2136. P. 3530–3549.

70. Kim C. I., Schiavone P., Ru C.-Q. The effect of surface elasticity on a mode-III interface crack. Archives of Mechanics. 2011. Vol. 63, No. 3. P. 267–286.

71. Kim C. I., Schiavone P., Ru C.-Q. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode III crack: complete solution. Journal of Applied Mechanics. 2010. Vol. 77, No. 2. P. 021011. URL: https://doi.org/10.1115/1.3177000

72. Kletskov O., Silich-Balhabaieva V., Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. On deformation peculiarities of two thin strips with a microcrack at the interface. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2025. Вип. 2 (118). С. 153–167. URL: https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2025.02.153

73. Konda N., Erdogan F. The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium. Engineering Fracture Mechanics. 1994. Vol. 47, No. 4. P. 533–545.

74. Kryven V., Blashchak N., Valiashek V., Kryva N., Tsymbaliuk L. Elastic-plastic deformation of a half-layer with a notch at rigid loading. Scientific Journal of TNTU. 2019. Vol. 96, No. 4. P. 5–13.

75. Lekhnitskii S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day, SanFrancisco,1963. 408pp.

76. Liu J., Wu R., Xia R. Surface effects at the nanoscale based on Gurtin's theory: a review. Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2014. № 23 (5-6). С. 141–151.

77. Loboda V., Sheveleva A., Chapelle F., Lapusta Y. A set of electrically conducting collinear cracks between two dissimilar piezoelectric materials. International Journal of Engineering Science. 2022. Vol. 178. P. 103725.

78. Loboda V., Shevelova N., Khodanen T. et al. An interaction of electrically conductive and electrically permeable collinear cracks in the interface of piezoelectric materials. Archive of Applied Mechanics. 2022. Vol. 92. P. 1465–1480. URL: https://doi.org/10.1007/s00419-022-02123-3

79. Loboda V., Sheveleva A., Komarov O., Chapelle F., Lapusta Y. Arbitrary number of electrically permeable cracks on the interface between two one-dimensional piezoelectric quasicrystals with piezoelectric effect. Engineering Fracture Mechanics. 2022. Vol. 276. P. 108878.

80. Loboda V., Sheveleva A., Komarov O. et al. Interaction of two collinear interface cracks with different electrical conditions at their faces in a one-dimensional piezoelectric quasicrystal. Acta Mechanica. 2022. Vol. 233. P. 2719–2735. URL: https://doi.org/10.1007/s00707-022-03254-y

81. Mossakovskii V. I. and Rybka M. T. Generalization of the Griffith-Sneddon criterion for the case of a nonhomogeneous body, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol.28, No.6 (1964), pp.1277-1286, DOI: 10.1016/0021-8928(64)90039-5.

82. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningen: Noordhoff, 1953. 704 p.

83. Muskhelishvili N.I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977. 732 p.

84. Nguyen T. B., Rungamornrat J., Senjuntichai T. Analysis of planar cracks in 3D elastic media with consideration of surface elasticity. International Journal of Fracture. 2016. Vol. 202. P. 51–77.

85. Ni L., Nemat–Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: an analytical solution. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1991. Vol. 39. P. 113–144.

86. Ni L., Nemat–Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: general case. Quarterly of Applied Mathematics. 1992. Vol. 2. P. 305–322.

87. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A. Electromagnetoelasticity. New York, Gordon and Breach, 1988. 526 p.

88. Pei P., Yang G., Shi Y., Gao C.-F. Periodic interfacial cracks in dissimilar piezoelectric materials under the influence of Maxwell stress. Meccanica. 2020. Vol. 55. P. 113–124.

89. Piskozub Y. Z. Effect of surface tension on the antiplane deformation of bimaterial with a thin interface microinclusion. Mathematical Modeling and Computing. 2021. Vol. 8, No. 1. P. 69–77.

90. Piskozub Y. Z., Sulym H. T. Effect of Surface Stresses on the Antiplane Stress-Strain State of a Thin Ribbon-Like Interface Inclusion. Journal of Mathematical

Sciences. 2023. Vol. 272. P. 112–124. URL: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06403-3

91. Quan W., Sun C. T. Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids. International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35, № 25. P. 3317–3330.

92. Rice J. R., Sih G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media. Journal of Applied Mechanics. 1965. Vol. 32. P. 418–423.

93. Ru C. Q. Simple geometrical explanation of Gurtin-Murdoch model of surface elasticity with clarification of its related versions. Science China. 2010. V. 53. P. 536–544.

94. Rybicki E. F., Kanninen M. F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. Engineering Fracture Mechanics. 1977. Vol. 9. P. 931–938. URL: https://doi.org/10.1016/0013-7944(77)90013-3

95. Sharma P., Ganti S. Size-Dependent Eshelby's Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface/Interface Energies. ASME Journal of Applied Mechanics. 2004. Vol. 71, No. 5. P. 663–671.

96. Shbechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J. W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. Physical Review Letters. 1984. Vol. 53 (20). P. 1951–1953. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1951

97. Shbeeb N. I., Binienda W. K., Kreider K. L. Analysis of the Driving Forces for Multiple Cracks in an Infinite Nonhomogeneous Plate, Part I: Theoretical Analysis. ASME Journal of Applied Mechanics. 1999. Vol. 66, No. 2. P. 492–500. URL: https://doi.org/10.1115/1.2791074

98. Sheveleva A., Komarov O. V., Gergel I. Y., Loboda V. V. A system of interface cracks in a one-dimensional quasicrystal with a piezoelectric effect. Питання прикладної математики і математичного моделювання. 2025. Volume 25. P. 227–237.

99. Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. Applied Mathematical Modelling. 2020. № 87. C. 287–299. URL: https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.003

100. Shi W. C., Li H. H., Gao Q. H. Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals. Key Engineering Materials. 2007. Vol. 340–341. P. 453–458. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.453

101. Simovov I.V. An interface crack in an inhomogeneous stress field. International Journal of Fracture. 1990. Vol. 46. P. 223-235.

102. Stroh A. N. Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity. Philosophical Magazine. 1958. Vol. 7. P. 625–646.

103. Su M., Xiao J. Model III fracture analysis of a nanoscale elliptical hole with four cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. Engineering Fracture Mechanics. 2022. Vol. 274, No. 20. P. 108776.

104. Tian L., Rajapakse R. K. N. D. Analytical Solution of Size-Dependent Elastic Field of a Nano-Scale Circular Inhomogeneity. ASME Journal of Applied Mechanics. 2007. Vol. 74, No. 3. P. 568–574.

105. Ting T. C. T. Anisotropic Elasticity: Theory and Applications. Oxford: Oxford University Press, 1996. 592 p.

106. Ting T. C. T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites. International Journal of Solids and Structures. 1986. Vol. 22. P. 965–983.

107. Ting T. C. T. Interface cracks in anisotropic bimaterial. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1990. Vol. 38. P. 505–513.

108. Ting T. C. T. Recent developments in anisotropic elasticity. International Journal of Solids and Structures. 2000. Vol. 37. P. 401–409.

109. Verma P. R. Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2022. Vol. 29. P. 1529–1542.

110. Verma P. R., Verma R. R. Magneto-electro-elastic analysis for two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip. International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation. 2020. Vol. 10, No. 2. P. 187–213. URL: https://doi.org/10.1504/IJMMNO.2020.10027649

111. Walton J. R. A note on fracture models incorporating surface elasticity. Journal of Elasticity. 2012. Vol. 109. P. 95–102.

112. Wang G.-F., Feng X.-Q., Wang T.-J., Gao W. Surface Effects on the Near-Tip Stresses for Mode-I and Mode-III Cracks. ASME Journal of Applied Mechanics. 2008. Vol. 75. P. 1–5.

113. Wang M. Z., Ting T. C. T., Yan G. The anisotropic elastic semi-infinite strip. Quarterly of Applied Mathematics. 1993. Vol. 51. P. 283–297.

114. Wang X., Zhou K. A crack with surface effects in a piezoelectric material. Mathematics and Mechanics of Solids. 2015. V. 20. P. 1131–1146.

115. Wang X., Zhou K., Wu M. S. Interface cracks with surface elasticity in anisotropic bimaterials. International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 59. P. 110–120. URL: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.01.023

116. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. Bulletin of the Seismological Society of America. 1959. № 49. P. 199–204.

117. Xin Y. Y., Xiao J. H. An analytic solution of an arbitrary location through-crack emanating from a nano-circular hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. Mathematics and Mechanics of Solids. 2024. Vol. 29, Iss. 1. P. 71–82. DOI: 10.1177/10812865231186341

118. Xin Y. Y., Xiao J. H. Fracture mechanics of an arbitrary position crack emanating from a nano-hole in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. Acta Mechanica. 2023. V. 234, No. 4. P. 1409–1420.

119. Yang Y., Hu Z. L., Gharahi A. et al. Torsion of an elastic medium containing a nanosized penny-shaped crack with surface effects. International Journal of Fracture. 2021. Vol. 231. P. 189–199.

120. Yang Y., Hu Z. L., Li X. F. Cracked elastic layer with surface elasticity under antiplane shear loading. Acta Mechanica. 2020. V. 231. P. 3085–3098. URL: https://doi.org/10.1007/s00707-020-02695-7

121. Yang Y., Ma W. L., Hu Z. L. et al. Antiplane shear crack in a functionally graded material strip with surface elasticity. Archive of Applied Mechanics. 2021. Vol. 91. P. 3035–3052. URL: https://doi.org/10.1007/s00419-021-01948-8

122. Ying Y., Hu Z., Li X.-F. Nanoscale mode-III interface crack in a bimaterial with surface elasticity. Mechanics of Materials. 2020. Vol. 140. Art. 103246.

123. Zamlyanova A. Y. An interface crack between two elastic semi-planes in the presence of surface energy. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2026. Vol. 38. Art. 35.

124. Zhang A. B., Wang B. L. An opportunistic analysis of the interface crack based on the modified interface dislocation method. International Journal of Solids and Structures. 2013. № 50. P. 15–20.

125. Zhang L., Wu D., Xu W., Yang L., Ricoeur A., Wang Z., Gao Y. Green's functions of one-dimensional quasicrystal bi-material with piezoelectric effect. Physics Letters A. 2016. Vol. 380. P. 3222–3228. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07.043

126. Zhao M. H., Dang H. Y., Fan C. Y., Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 1: Theoretical solution. Engineering Fracture Mechanics. 2017. Vol. 179. P. 59–78. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.019

127. Zhao M. H., Dang H. Y., Fan C. Y., Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 2: Numerical method. Engineering Fracture Mechanics. 2017. Vol. 180. P. 268–281. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.05.042

128. Zhao X. F., Ma Y. Y., Lu S. N. Anti-plane problem of nano-cracks emanating from a regular triangular nano-hole in one dimensional hexagonal quasicrystals. Science Technology and Engineering. 2023. V. 23, No. 7. P. 2727–2733.

129. Zhou Y. B., Li X. F. Two collinear mode-III cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal strip. Engineering Fracture Mechanics. 2018. Vol. 189. P. 133–147. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.10.030

130. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method for solid and structural mechanics. Oxford: Elsevier, 2005. Vol. 2. 736 p.

ДОДАТКИ

Додаток А. Список опублікованих праць

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Клєцков О.М., Лобода В.В. Аналітичний та чисельний аналіз мікротріщини вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки. Computer Science and Applied Mathematics. 2024. № 2. С. 5-12. https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-2-01;
2. Kletskov O., Silich-Balhabaieva V., Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. On deformation peculiarities of two thin strips with a microcrack at the interface. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2025. Вип. 2(118). С. 153-167. https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2025.02.153;
3. Клєцков О.М., Лобода В.В. Міжфазна тріщина між двома ізотропними матеріалами з урахуванням поверхневих ефектів. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2025. Вип. 40. С. 86-103. https://doi.org/10.15421/4225216;
4. Клєцков О.М., Шевельова А.Є., Лобода В.В. Ефект поверхневої пружності при аналізі нанотріщини в антиплоскому полі навантажень. Системні технології. 2026. Вип. 1(162). С. 177-190. https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-162-2026-19;
5. Клєцков О. М., Лобода В. В. Аналіз антиплоскої деформації квазікристала з тріщиною з урахуванням поверхневих ефектів. Технічна механіка. 2026. № 1. С. 62-72. https://doi.org/10.15407/itm2026.01.062.

Тези доповідей:

4. Клєцков О.М., Лобода В.В. Аналітичний та чисельний аналіз мікротріщини вздовж жорстко закріпленого краю тонкої накладки. Математичні проблеми технічної механіки - 2024: матеріали Міжнар. наук. конф. (18-19 квітня 2024р., м. Дніпро). Дніпро: ДНУ, 2024. Ч. 1. С. 89–90.
5. Клєцков О.М., Шевельова А.Є, Лобода В.В. Вплив поверхневої пружності на нанотріщину в ізотропному матеріалі. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2025): тези доп. XXIII Міжнар. наук.-практ. конф., м. Дніпро, 19-21 листопада 2025 р. Дніпро: Дніпров. нац. ун-т ім. Олеся Гончара, 2025. С. 168.
6. Клєцков О.М., Лобода В.В. Вплив поверхневих ефектів на антиплоску деформацію квазікристалу з тріщиною. Математичні проблеми технічної механіки - 2026: матеріали Міжнар. наук. конф. (19-20 лютого 2026р., м. Дніпро). Дніпро: Дніпров. нац. ун-т ім. О. Гончара, 2026. Ч. 1. С. 43.

$$H_{11}[\alpha]=\frac{1}{Zn[\alpha]}\Big(-4e^{-2\alpha h_2}\alpha(1+\kappa_1)\big(1+e^{2\alpha h_2}\kappa_2\big)h_1\big(e^{2\alpha h_2}+\kappa_2-2\alpha h_2\big)+$$
$$+4e^{-2\alpha h_2}\big(-1+e^{2\alpha h_2}\big)K\alpha^2(1+\kappa_2)h_1^2\big(\kappa_2+e^{2\alpha h_2}\kappa_2-2\alpha h_2\big)+$$
$$+4\sinh[\alpha h_1]\Big(-\big((1+\kappa_1)\cosh[\alpha h_1]\big(1+\kappa_2{}^2+2\kappa_2\cosh[2\alpha h_2]\big)\big)-2K\kappa_2(1+\kappa_2)\sinh[\alpha h_1]\sinh[2\alpha h_2]+$$
$$+2\alpha\Big((1+\kappa_1)\big(e^{-2\alpha h_2}+\kappa_2\big)\cosh[\alpha h_1]+\big(1-e^{-2\alpha h_2}\big)K(1+\kappa_2)\sinh[\alpha h_1]\big)h_2\Big)\Big),$$

$$H_{12}[\alpha]=\frac{1}{Zn[\alpha]}\Big(2\big(-1+\kappa_1-2K\kappa_2+(-1+2K+\kappa_1)\kappa_2{}^2\big)-2\big(-1+\kappa_1-2K\kappa_2+(-1+2K+\kappa_1)\kappa_2{}^2\big)\cosh[2\alpha h_1]-$$
$$-2\kappa_2\big(-1+K+\kappa_1-K\kappa_2\big)\cosh\big[2\alpha\big(h_1-h_2\big)\big]+\kappa_2\big(4\big(-1+K+\kappa_1-K\kappa_2\big)\cosh[2\alpha h_2]+$$
$$+\big(-2\big(-1+K+\kappa_1\big)+K\kappa_2\big)\cosh\big[2\alpha\big(h_1+h_2\big)\big]+K\kappa_2(\cosh\big[\alpha\big(2h_1+h_2\big)\big]+\sinh\big[2\alpha\big(h_1+h_2\big)\big]-\sinh\big[\alpha\big(2h_1+h_2\big)\big]\big)\big)+$$
$$+2\alpha\Big(\big(2K+e^{-2\alpha(h_1+h_2)}\big(-1+K+\kappa_1\big)-e^{-\alpha(2h_1+h_2)}K\kappa_2-2\big(-1+K+\kappa_1\big)\kappa_2+e^{2\alpha(h_1-h_2)}\big(-1+K+\kappa_1-K\kappa_2\big)-$$
$$-2e^{-2\alpha h_2}\big(-1+K+\kappa_1-K\kappa_2\big)+e^{-2\alpha h_1}\big(-K+\big(-1+K+\kappa_1\big)\kappa_2\big)+e^{2\alpha h_1}\big(-K+\big(-1+K+\kappa_1\big)\kappa_2\big)\big)h_2+$$
$$+2e^{-2\alpha h_2}\alpha h_1^2\big(-e^{4\alpha h_2}\big(2+K\big(-1+\kappa_2\big)\big)\kappa_2-\big(2+K\big(-1+\kappa_2\big)\big)\big(\kappa_2-2\alpha h_2\big)-$$
$$-2e^{2\alpha h_2}\big(1+\kappa_2\big(K+\kappa_2-K\kappa_2\big)+\alpha\big(-K+\big(-2+K\big)\kappa_2\big)h_2\big)\big)\big)\Big),$$

$$H_{21}(\alpha)=\frac{1}{Zn[\alpha]}\Big(-4\big(-1+\kappa_1-2K\kappa_2+\big(-1+2K+\kappa_1\big)\kappa_2{}^2+2\kappa_2\big(-1+K+\kappa_1-K\kappa_2\big)\cosh[2\alpha h_2]\big)\sinh[\alpha h_1]^2+$$
$$+4e^{-2\alpha h_2}\alpha\Big(2\big(-1+K+\kappa_1-K\kappa_2+e^{2\alpha h_2}\big(K+\big(-1+3K+\kappa_1\big)\kappa_2\big)\big)\sinh[\alpha h_1]^2h_2+$$
$$+\alpha h_1^2\big(-e^{4\alpha h_2}\big(2+K\big(-1+\kappa_2\big)\big)\kappa_2-\big(2+K\big(-1+\kappa_2\big)\big)\big(\kappa_2-2\alpha h_2\big)-$$
$$-2e^{2\alpha h_2}\big(1+\kappa_2\big(K+\kappa_2-K\kappa_2\big)+\alpha\big(K-2\kappa_2+3K\kappa_2\big)h_2\big)\big)\big)\Big),$$

$$H_{22}(\alpha)=\frac{1}{Zn[\alpha]}\Big(4\big(e^{-2\alpha h_2}\alpha(1+\kappa_1)\big(1+e^{2\alpha h_2}\kappa_2\big)h_1\big(e^{2\alpha h_2}+\kappa_2-2\alpha h_2\big)+$$
$$+e^{-2\alpha h_2}\big(1+e^{2\alpha h_2}\big)K\alpha^2(1+\kappa_2)h_1^2\big(\big(-1+e^{2\alpha h_2}\big)\kappa_2+2\alpha h_2\big)+$$
$$+\sinh[\alpha h_1]\Big(-\big((1+\kappa_1)\cosh[\alpha h_1]\big(1+\kappa_2{}^2+2\kappa_2\cosh[2\alpha h_2]\big)\big)-2K\kappa_2(1+\kappa_2)\sinh[\alpha h_1]\sinh[2\alpha h_2]+$$
$$+2\alpha\Big(\big(1+\kappa_1\big)\big(e^{-2\alpha h_2}+\kappa_2\big)\cosh[\alpha h_1]+\big(-1-e^{-2\alpha h_2}\big)K(1+\kappa_2)\sinh[\alpha h_1]\big)h_2\Big)\Big)\Big),$$

де $Zn[\alpha]=8K\alpha^2(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)h_1h_2-$
$$-8e^{-2\alpha h_2}\alpha^2\big(-1+e^{2\alpha h_2}\big(-1+K\big)\kappa_2-K\kappa_2\big)h_1^2\big(\kappa_2-K\kappa_2+e^{2\alpha h_2}\big(1+K\kappa_2\big)+2\big(-1+K\big)\alpha h_2\big)+$$
$$+2e^{-2\alpha(h_1+h_2)}\big(1-e^{2\alpha h_2}\big(-1+K\big)\kappa_2+K\kappa_2+e^{2\alpha(h_1+h_2)}\big(K+\kappa_1\big)\kappa_2+e^{2\alpha h_1}\big(\kappa_1-K\kappa_2\big)\big)\times$$
$$\times\big(-e^{2\alpha h_1}\big(-1+K\big)\kappa_2+\big(K+\kappa_1\big)\kappa_2+e^{2\alpha h_2}\big(\kappa_1-K\kappa_2\big)+e^{2\alpha(h_1+h_2)}\big(1+K\kappa_2\big)+2\alpha\big(e^{2\alpha h_1}\big(-1+K\big)-K-\kappa_1\big)h_2\big).$$